Løsningsforslag til øving 8

Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \boldsymbol{a} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
= & \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{a} \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\
= & -(\hat{x} k_x + \hat{y} k_y + \hat{z} k_z) \cdot \boldsymbol{a} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\
= & -\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{a} \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \boldsymbol{a} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
= & \hat{x} \frac{\partial}{\partial y} a_z \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) - \hat{x} \frac{\partial}{\partial z} a_y \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
& + \hat{y} \frac{\partial}{\partial z} a_x \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) - \hat{y} \frac{\partial}{\partial x} a_z \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
& + \hat{z} \frac{\partial}{\partial x} a_y \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) - \hat{z} \frac{\partial}{\partial y} a_x \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
= & -\left[\hat{x}(k_y a_z - k_z a_y) + \hat{y}(k_z a_x - k_x a_z) + \hat{z}(k_x a_y - k_y a_x) \right] \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
= & -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{a} \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)
\end{aligned}$$

b) Vi kan for eksempel se på x-komponenten av vektoridentiteten som vi er bedt om å bevise:

$$\begin{aligned}
\left[\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) \right]_x &= \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \boldsymbol{a})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \boldsymbol{a})_y \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \\
&= \left[\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{a}) \right]_x - \left[\nabla^2 \boldsymbol{a} \right]_x
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Helt generelt vil vi ha, for en elektromagnetisk bølge som forplanter seg i retning $\hat{k}$ og som er polarisert i retning $\hat{n}$ (med $\hat{n} \perp \hat{k}$):

$$\boldsymbol{E} = \hat{n} E_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

Alternativt kunne vi selvsagt ha brukt sinus i stedet for cosinus. Ettersom $c = \omega/k$, der $k = |\boldsymbol{k}|$ (slik at $\boldsymbol{k} = k\hat{k}$), kan vi også skrive

$$\boldsymbol{E} = \hat{n} E_0 \cos[\omega(t - \hat{k} \cdot \boldsymbol{r}/c)]$$

I kartesiske koordinater er $\boldsymbol{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ kan deretter bestemmes ved hjelp av relasjonen som vi utledet fra Faraday-Henrys lov, nemlig

$$\omega \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$$

eller

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega} \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \boldsymbol{E}$$

a) Forplantning i negativ z-retning betyr at $\hat{k} = -\hat{z}$. Polarisering i y-retning betyr at $\hat{n} = \hat{y}$. Dermed:

$$\boldsymbol{E} = \hat{y} E_0 \cos[\omega(t + z/c)]$$

Det tilhørende magnetfeltet er

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \frac{1}{c} \hat{k} \times \boldsymbol{E} \\ &= \frac{1}{c} (-\hat{z}) \times \hat{y} E_0 \cos[\omega(t + z/c)] \\ &= \hat{x} \frac{E_0}{c} \cos[\omega(t + z/c)] \end{aligned}$$

Kartesiske komponenter av $\boldsymbol{k}$ og $\hat{n}$:

$$\begin{aligned} k_x = k_y = 0 \quad &, \quad k_z = -\frac{\omega}{c} \\ n_x = n_z = 0 \quad &, \quad n_y = 1 \end{aligned}$$

b) Forplantning i retning $(1, 1, 1)$ betyr at vi kan skrive

$$\boldsymbol{k} = a(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Samtidig har vi $k = \omega/c$ slik at

$$\frac{\omega}{c} = a\sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}a$$

dvs $a = \omega/\sqrt{3}c$. Dermed:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{\sqrt{3}c} (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

og

$$\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Polarisering normalt på z-aksen betyr at vi kan skrive

$$\hat{n} = n_x\hat{x} + n_y\hat{y}$$

Gauss' lov brukte vi til å vise at $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$, som her betyr at $\hat{k} \cdot \hat{n} = 0$, og som gir

$$(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \cdot (n_x\hat{x} + n_y\hat{y}) = n_x + n_y = 0$$

dvs $n_y = -n_x$. Ettersom $|\hat{n}| = 1$, finner vi $n_x = 1/\sqrt{2}$ og $n_y = -1/\sqrt{2}$ (eller omvendt, hvis du foretrekker det). Alt i alt:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c}\right)\right]$$

Det tilhørende magnetfeltet blir

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\hat{k} \times \boldsymbol{E} \\
&= \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{3}}\,(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c}\right)\right] \\
&= \frac{E_0}{\sqrt{6}c}(\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}) \cos\left[\omega\left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c}\right)\right]
\end{aligned}$$

Kartesiske komponenter av $\boldsymbol{k}$ og $\hat{n}$:

$$\begin{aligned}
k_x &= k_y = k_z = \frac{\omega}{\sqrt{3}c} \\
n_x &= -n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ n_z = 0
\end{aligned}$$

Figur: