Øving 1

Oppgave 1

En kloss med masse m er festet til ei (masseløs) fjær med kraftkonstant k. Fjæra er festet til en vegg i sin venstre ende. Klossen kan gli uten friksjon på et horisontalt underlag. Bevegelsen blir startet (ved $t = 0$) ved å dra klossen fra likevektsposisjonen $x = 0$ mot høyre til posisjon x_0 og gi den en hastighet v_0 mot høyre. Klossen utfører deretter harmoniske svingninger beskrevet ved $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ der $\omega = 2\pi/T$ er vinkelfrekvensen, T er perioden, og ϕ er en fasekonstant.

a) Finn uttrykk for ω, ϕ og amplituden A.

b) Finn systemets totale energi E.

c) Vi kunne alternativt ha skrevet løsningen på formen $x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$. Hva blir da de to koeffisientene B og C?

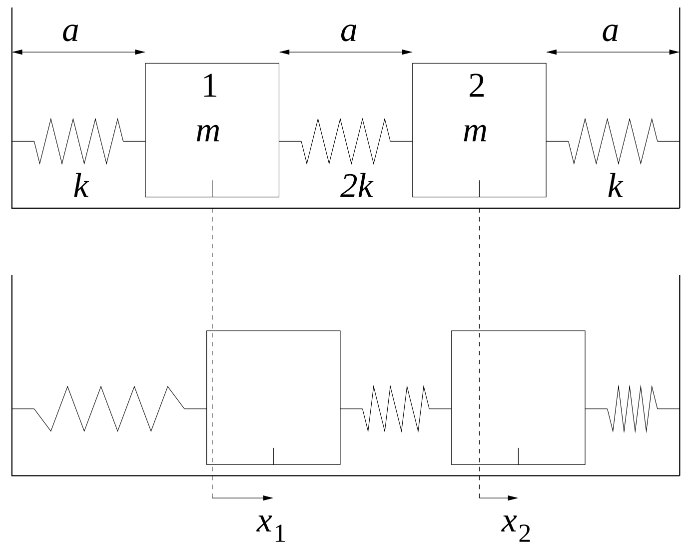
d) Bestem tallverdier for svingebevegelsens maksimale utsving og maksimale hastighet dersom $m = 100$ g, $k = 10$ N/m, $x_0 = 1.0$ cm og $v_0 = 10$ cm/s.

Oppgave 2

Systemet i oppgave 1 dreies 90 grader slik at massen m henger vertikalt i tyngdefeltet. Ny likevektsposisjon for klossen tilsvarer at fjæra er strukket en lengde Δx. Finn et uttrykk for Δx. (Tyngdens akselerasjon: $g = 9.8$ m/s^2) Bestem også tallverdi for Δx. Skriv ned bevegelsesligningen for klossen og vis at den vil svinge harmonisk med samme frekvens som før.

Oppgave 3

To like klosser, hver med masse m, er festet til masseløse fjærer med fjærkonstant henholdsvis k (de to ytterste) og $2k$ (den i midten).



I den øverste figuren er hele systemet i likevekt: Begge masser er i ro, alle fjærer har lengde a, og de er verken strukket eller sammenpresset. Nederst er det vist en generell tilstand, der x_1 og x_2 angir "utsvingene" til henholdsvis masse 1 og 2.

a) Skriv ned bevegelsesligningene for de to klossene.

b) Anta at de to klossene utfører harmoniske svingninger med samme vinkelfrekvens ω og samme fasekonstant ϕ. Med andre ord, anta at

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A\cos(\omega t + \phi) \\ x_2(t) &= B\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Sett disse antagelsene inn i bevegelsesligningene og vis at de to mulige vinkelfrekvensene som klossene kan svinge med er $\omega_a = \sqrt{k/m}$ og $\omega_s = \sqrt{5k/m}$.

c) Bestem, for hver av vinkelfrekvensene ω_a og ω_s, sammenhengen mellom koeffisientene A og B. Tegn øyeblikksbilder av systemet når det svinger i hver av disse såkalte "normale modene" a (for antisymmetrisk) og s (for symmetrisk). Prøv om du kan se direkte fra disse bildene hva de tilhørende ω må være og sammenlign med det du fant i punkt b.

Fasitsvar:

Oppgave 1: d) 1.4 cm, 14 cm/s.

Oppgave 2: 9.8 cm.

"Sjekk selv"

(Små utregninger, typisk slike som ikke ble tatt i detalj på forelesningene. Uten retting og uten løsningsforslag.)

1. Vis at
$$Ce^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t} = 2\mathrm{Re}\left[Ce^{i\omega t}\right]$$
Her er C^* den kompleks konjugerte av C.

2. Vis at
$$2\mathrm{Re}\left[Ce^{i\omega t}\right] = D\cos\omega t + G\sin\omega t$$
dersom
$$D = 2\mathrm{Re}C \quad , \quad G = -2\mathrm{Im}C$$

3. Vis at
$$x(t) = ae^{-\delta t} + bte^{-\delta t}$$
er løsning av differensialligningen
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
når $\omega_0 = \delta$. Her er a og b vilkårlige konstanter.