**FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2008.**
Veiledning: Torsdag 30. oktober. Innleveringsfrist: Mandag 3. november kl 12:00.

# Øving 10

## Oppgave 1

*a*) Planet $z = 0$ danner grenseflaten mellom to lineære medier 1 ($z < 0$) og 2 ($z > 0$), med permittiviteter og permeabiliteter henholdsvis $\varepsilon_1$, $\mu_1$ og $\varepsilon_2$, $\mu_2$. Anta at en plan harmonisk elektromagnetisk bølge kommer inn fra venstre, dvs den forplanter seg i positiv $z$-retning. Amplituden til elektrisk felt i innkommende bølge er $E_{i0}$. Vis at bølgen som reflekteres i $z = 0$ har amplitude

$$E_{r0} = \frac{1-\beta}{1+\beta}\, E_{i0}$$

og at bølgen som transmitteres i $z = 0$ har amplitude

$$E_{t0} = \frac{2}{1+\beta}\, E_{i0}$$

Her er

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$$

med $v_j = c/n_j$ = bølgens (fase-)hastighet i medium $j$. $n_j$ er brytningsindeksen i medium $j$. (Dette tilsvarer figuren i oppgave 2, med alle vinkler lik null.)

*b*) Innkommende bølge har intensitet $I_i$. Denne fordeler seg på den reflekterte ($I_r$) og den transmitterte ($I_t$) bølgen. Finn refleksjonskoeffisienten

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i}$$

og transmisjonskoeffisienten

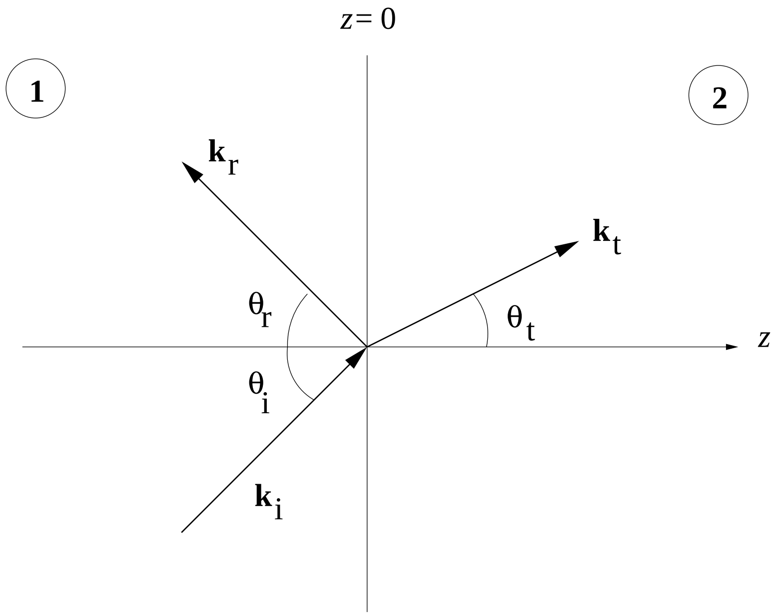
$$T \equiv \frac{I_t}{I_i}$$

uttrykt ved brytningsindeksene $n_1$ og $n_2$ i det vi antar at begge medier er umagnetiske, dvs $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Bestem tallverdier for $R$ og $T$ for grenseflaten mellom luft ($\simeq$ vakuum) og glass med relativ permittivitet 2.25.

## Oppgave 2

*Geometrisk optikks tre lover*

Planet $z = 0$ danner grenseflaten mellom to lineære medier 1 ($z < 0$) og 2 ($z > 0$), med brytningsindekser henholdsvis $n_1$ og $n_2$. Anta at en plan harmonisk elektromagnetisk bølge kommer inn "fra venstre" slik at forplantningsretningen, gitt ved bølgetallsvektoren $\boldsymbol{k}_i$, danner en vinkel $\theta_i$ med $z$-aksen. Innkommende bølge blir delvis reflektert, med bølgetallsvektor $\boldsymbol{k}_r$, og delvis transmittert (evt *refraktert*), med bølgetallsvektor $\boldsymbol{k}_t$, som vist i figuren.




Elektrisk feltvektor for de tre bølgene er

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_i &= \boldsymbol{E}_{i0} \cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
\boldsymbol{E}_r &= \boldsymbol{E}_{r0} \cos(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
\boldsymbol{E}_t &= \boldsymbol{E}_{t0} \cos(\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)
\end{aligned}$$

Bølgetallsvektoren $\boldsymbol{k}_i$ kan uttrykkes i kartesiske koordinater,

$$\boldsymbol{k}_i = k_{ix}\hat{x} + k_{iy}\hat{y} + k_{iz}\hat{z}$$

og tilsvarende for $\boldsymbol{k}_r$ og $\boldsymbol{k}_t$.

*a*) Bruk av grensebetingelsene for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i planet $z = 0$ (betingelser som skal gjelde overalt i dette planet, dvs for alle $x$ og $y$ og til alle tider $t$) vil resultere i ligninger på formen

$$A\cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) + B\cos(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) = C\cos(\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

der koeffisientene $A$, $B$ og $C$ ikke avhenger av $\boldsymbol{r}$ og $t$. (Disse skal ikke bestemmes her.) Bruk dette til å argumentere for at

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}$$

for alle mulige posisjoner $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ i grenseflaten $z = 0$.

Argumenter videre for at vi da må ha

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

*og*

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

Men da har vi 3 vektorer med 2 av komponentene identiske, hvilket må bety at de 3 vektorene alle ligger i ett og samme plan. Vi ser dessuten at dette planet står vinkelrett på grenseflaten, hvilket må bety at flatenormalen til grenseflaten også ligger i samme plan som de 3 bølgetallsvektorene.

Dette er geometrisk optikks 1. lov:

Bølgetallsvektorene til innkommende, reflektert og transmittert bølge danner et plan, det såkalte *innfallsplanet*, som også inkluderer flatenormalen til grenseflaten.

*b*) La oss nå velge $x-$ og $y$-aksene slik at $\boldsymbol{k}_i$ ligger i $xz$-planet. Vis at da er

$$k_i \sin\theta_i = k_r \sin\theta_r = k_t \sin\theta_t$$

og dermed

$$\theta_i = \theta_r$$

og

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

Dette er henholdsvis 2. lov (refleksjonsloven):

Innfallsvinkelen og refleksjonsvinkelen er like store: $\theta_i = \theta_r$.

Og 3. lov (brytningsloven, eller *Snells lov*):

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

**Oppgave 3**

(Denne oppgaven er dekket gjennom to av øvingene i FY1003/TFY4155 våren 2008. Du må selv vurdere behovet for å gjøre den her.)

Bruk Maxwells ligninger,

$$\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} &= q_f \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} &= I_f + \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

til å utlede grenseflatebetingelsene $\Delta D_\perp = 0$, $\Delta E_\| = 0$, $\Delta B_\perp = 0$ og $\Delta H_\| = 0$ for en grenseflate uten fri ladning og strøm. Velg lukkede kurver og flater som antydet i figuren nedenfor og la $h \to 0$.