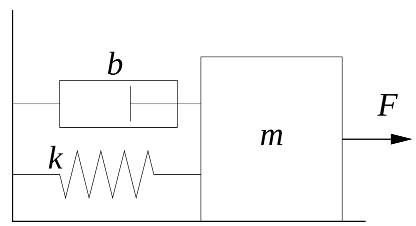
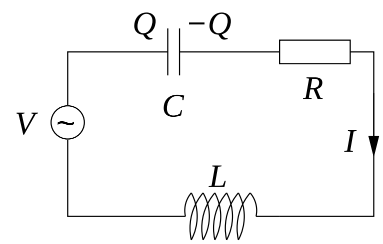
FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2008.
Veiledning: Torsdag 3. september. Innleveringsfrist: Mandag 8. september kl 12:00.

Øving 2

A



B



a) I forelesningene har vi sett at det mekaniske svingesystemet i figur A ovenfor, med $F(t) = F_0 \cos \omega t$, oppfyller bevegelsesligningen

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t,$$

der x representerer massens utsving i forhold til likevektsposisjonen $x = 0$.
Vis, ved hjelp av Kirchhoffs spenningsregel, at den elektriske svingekretsen i figur B, med $V(t) = V_0 \cos \omega t$, oppfyller en tilsvarende differensialligning,

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t,$$

der Q representerer ladningen på kondensatoren.
Ved direkte sammenligning ser en at selvinduktansen L i det elektriske svingesystemet er *analog* til massen m i det mekaniske svingesystemet. (Ikke urimelig: m representerer treghet i det mekaniske systemet, dvs en motstand mot endringer i hastigheten; L representerer treghet i det elektriske systemet, dvs en motstand mot endringer i strømstyrken.)
Hva er den elektriske svingekretsens analogier til størrelsene b, k, F_0, x og $\dot{x}$ i det mekaniske systemet?

b) Siden den elektriske kretsen er analog til det mekaniske systemet, må ladningen på kondensatoren bli

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \phi_0),$$

i det vi antar at spenningskilden har stått på så lenge at en eventuell homogen løsning $Q_h(t)$ av den tilsvarende homogene ligningen kan neglisjeres.
Amplituden til ladningen på kondensatoren er nå gitt ved

$$Q_0 = \frac{V_0}{\omega G(\omega)},$$

mens fasekonstanten er gitt ved

$$\cos \phi_0 = \frac{R}{G(\omega)}.$$

Her er

$$G(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

Sett inn den oppgitte løsningen $Q(t)$ i differensialligningen og vis at Q_0 og ϕ_0 blir som angitt. Bestem den vinkelfrekvensen $\omega = \omega_1$ til spenningskilden som gir størst mulig ladningsamplitude Q_0, samt den vinkelfrekvensen $\omega = \omega_2$ som gir størst mulig strømamplitude I_0. Bestem tallsvar for ω_1 og ω_2 når kretsen har følgende komponenter: $R = 100\,\Omega$, $L = 0.1$ mH, $C = 10$ nF. Finn også (tall-)verdien til de tilhørende fasekonstantene ϕ_{01} og ϕ_{02}. Tegn opp ladnings- og strømamplituden som funksjon av vinkelfrekvensen ω.

Oppgitt: Spenningsfall over motstand: RI; over kondensator: Q/C; over induktans: $L\dot{I}$.

c) Vi betrakter nå frie ($F = 0$) og svakt dempede ($b/2m \equiv \delta \ll \omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$) svingninger i det mekaniske systemet i figur A. Vis at relativt energitap pr periode er bestemt av systemets godhetsfaktor Q:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)} = \frac{2\pi}{Q}$$

d) Vis at (midlere) tilført effekt,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T F_0 \cos \omega t \dot{x}(t) dt,$$

tilsvarer (midlere) tapt effekt på grunn av demping,

$$\langle P_d \rangle = \langle b \dot{x}^2 \rangle,$$

i det mekaniske systemet i figur A.

Fasitsvar:

b: $\omega_1 = 0.7$ MHz, $\omega_2 = 1.0$ MHz, $\phi_{01} = 35°$, $\phi_{02} = 0$.