

## Øving 7

### Oppgave 1

I virkeligheten er transversale bølger på en streng ikke fullstendig dispersjonsfrie. Anta at vi har en uniform metallstreng med sirkulært tverrsnitt  $A$ , massetetthet  $\rho$  og elastisk modul (Youngs modul)  $Y$ . Dispersjonsrelasjonen er da bestemt ved

$$\omega^2 = \frac{S}{\mu} k^2 + \frac{YA^2}{4\pi\mu} k^4$$

der  $S$  er strekket i strengen og  $\mu = \rho A$  er strengens masse pr lengdeenhet.

a) Vis at bølgene er dispersjonsfrie dersom bølgelengden oppfyller

$$\lambda \gg A \sqrt{\frac{\pi Y}{S}}$$

Anta at du har en pianostreng av stål, med diameter 1.4 mm, som er strukket med en kraft 941.5 N? Youngs modul for stål er  $1.95 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, og massetettheten er  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. Hva bør bølgelengden da være for at vi med god tilnærming kan anta dispersjonsfrie bølger på pianostrengen?

b) Finn uttrykk for frekvensavhengigheten til de transversale bølgenes fasehastighet og gruppehastighet, dvs  $v(\nu)$  og  $v_g(\nu)$ . (Tips: Ta utgangspunkt i  $v(k)$  og  $v_g(k)$  og bruk deretter den gitte dispersjonsrelasjonen som gir sammenhengen mellom  $\nu$  og  $k^2$ .) Hva blir  $v$  og  $v_g$  for lave frekvenser, dvs i grensen  $\nu \rightarrow 0$ ? Hva blir  $v$  og  $v_g$  for riktig høye frekvenser? Sett inn tallverdier for pianostrengen i a) og skisser  $v(\nu)$  og  $v_g(\nu)$  for frekvenser mellom 0 og 4 kHz.

### Oppgave 2

Overflatebølger på dypt vann (dvs i grenseflaten mellom vann og luft) kan med god tilnærming beskrives av dispersjonsrelasjonen

$$\omega = \sqrt{gk + \gamma k^3 / \rho}$$

Her er  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> tyngdens akselerasjon,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> vannets massetetthet og  $\gamma = 73$  mN/m vannets overflatespenning.

Finn uttrykk for bølglengdeavhengigheten til overflatebølgenes fasehastighet og gruppehastighet, dvs  $v(\lambda)$  og  $v_g(\lambda)$ . Hva blir  $v(\lambda)$  og  $v_g(\lambda)$  for bølglengder som er henholdsvis små og store i forhold til  $2\pi\sqrt{\gamma/\rho g}$ ? Sett inn tallverdier for grenseflaten mellom luft og vann og skisser  $v(\lambda)$  og  $v_g(\lambda)$  for bølglengder mellom 1 mm og 1 m. (Bruk logaritmisk skala for  $\lambda$ .)

Hva blir gruppehastigheten i grensen  $\lambda \rightarrow 0$  (evt  $k \rightarrow \infty$ )? Vurder om dette representerer noen "fare" for den oppgitte dispersjonsrelasjonen. (Tips: Bestem hvilken bølglengde som tilsvarer at gruppehastigheten nærmer seg lyshastigheten i vakuum,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s.) Gjør tilsvarende vurdering i grensen  $\lambda \rightarrow \infty$  (dvs  $k \rightarrow 0$ ).

### Oppgave 3

Når overflatebølgenes oppførsel bestemmes av tyngdekrefter alene, har vi såkalte *tyngdebølger*. (Vi må selvsagt fremdeles ha en viss overflatespenning for i det hele tatt å ha en veldefinert grenseflate, men kreftene som skyldes overflatespenningen kan nå neglisjeres i forhold til tyngdekreftene.) Da er dispersjonsrelasjonen gitt ved

$$\omega^2 = gk \tanh kd$$

både for dypt og grunt vann. Her er  $d$  vannets dybde.

a) Finn uttrykk for tyngdebølgenes fasehastighet  $v(k)$  og gruppehastighet  $v_g(k)$ . Skisser  $v$  og  $v_g$  som funksjoner av den dimensjonsløse størrelsen  $x = kd$ . Når vil du si at du er på grunt vann, dvs: For hvilke bølglengder er  $v_g = v$  en brukbar tilnærming?

b) Er den gitte dispersjonsrelasjonen for tyngdebølger konsistent med dypvannstilnærmelsen i oppgave 2?