22.11.10
F40+41

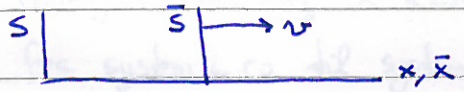
4-vektorer

Motivasjon: LT kobler rom og tid til "rom-tid" ("space-time")

⇒ innfører vektor med 4 elementer: x^μ $(\mu = 0,1,2,3)$
[jf. kont.lign. $\partial_\mu j_\mu = 0$ med $x_0 = ct$ og $j_0 = c\rho$, s.54]

med $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

samt $\beta = v/c$

LT blir da: (med 

)

$$\frac{\bar{x}^0}{c} = \gamma\left(\frac{x^0}{c} - \frac{v}{c^2} x^1\right) \Rightarrow \bar{x}^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

$$\bar{x}^1 = \gamma(x^1 - v x^0/c) = \gamma(x^1 - \beta x^0)$$

$$\bar{x}^2 = x^2$$

$$\bar{x}^3 = x^3$$

Kompakt notasjon, med implisitt sum (fra 0 til 3) over gjentatt(e) (greske) indekser (Einsteins summekonvensjon):

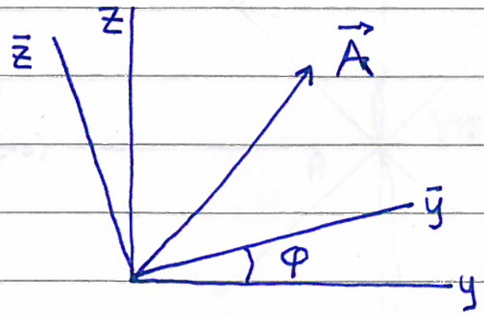
$$\bar{x}^\mu = L_{\mu\nu} x^\nu$$

med LT-matrisen $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eks: $\bar{x}^1 = L_{10} x^0 + L_{11} x^1 + L_{12} x^2 + L_{13} x^3$
$= -\beta\gamma x^0 + \gamma x^1 + 0 + 0 = \gamma(x^1 - \beta x^0)$

Vektorer (med 4 komp.) som transformerer (under LT) som x^μ kalles <u>4-vektorer</u>.

Jf. transformasjon av "vanlig 3-vektor" $\vec{A}$ ved rotasjon av koord. system om (f.eks.) x-aksen:



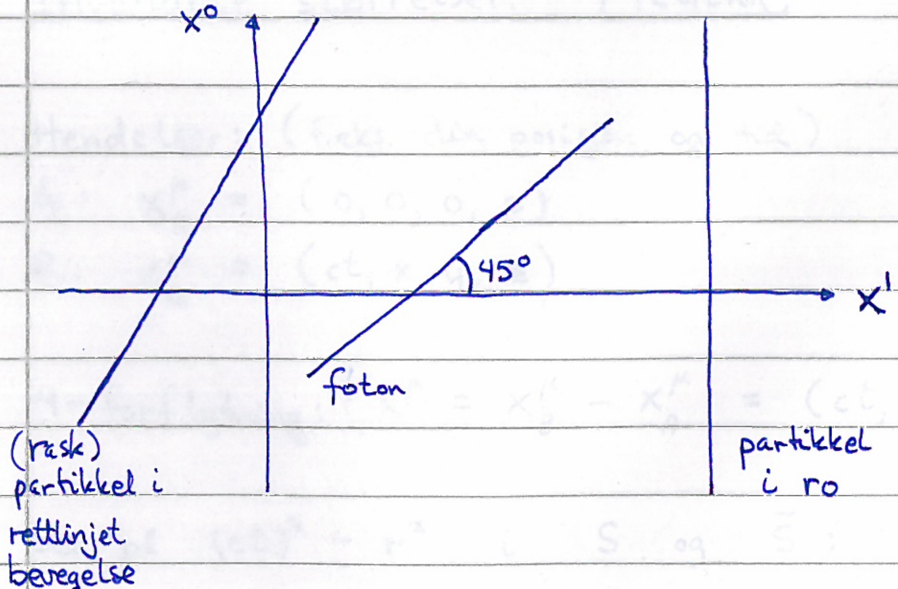
$$\bar{A}_i = R_{ij} A_j \quad \text{med}$$

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

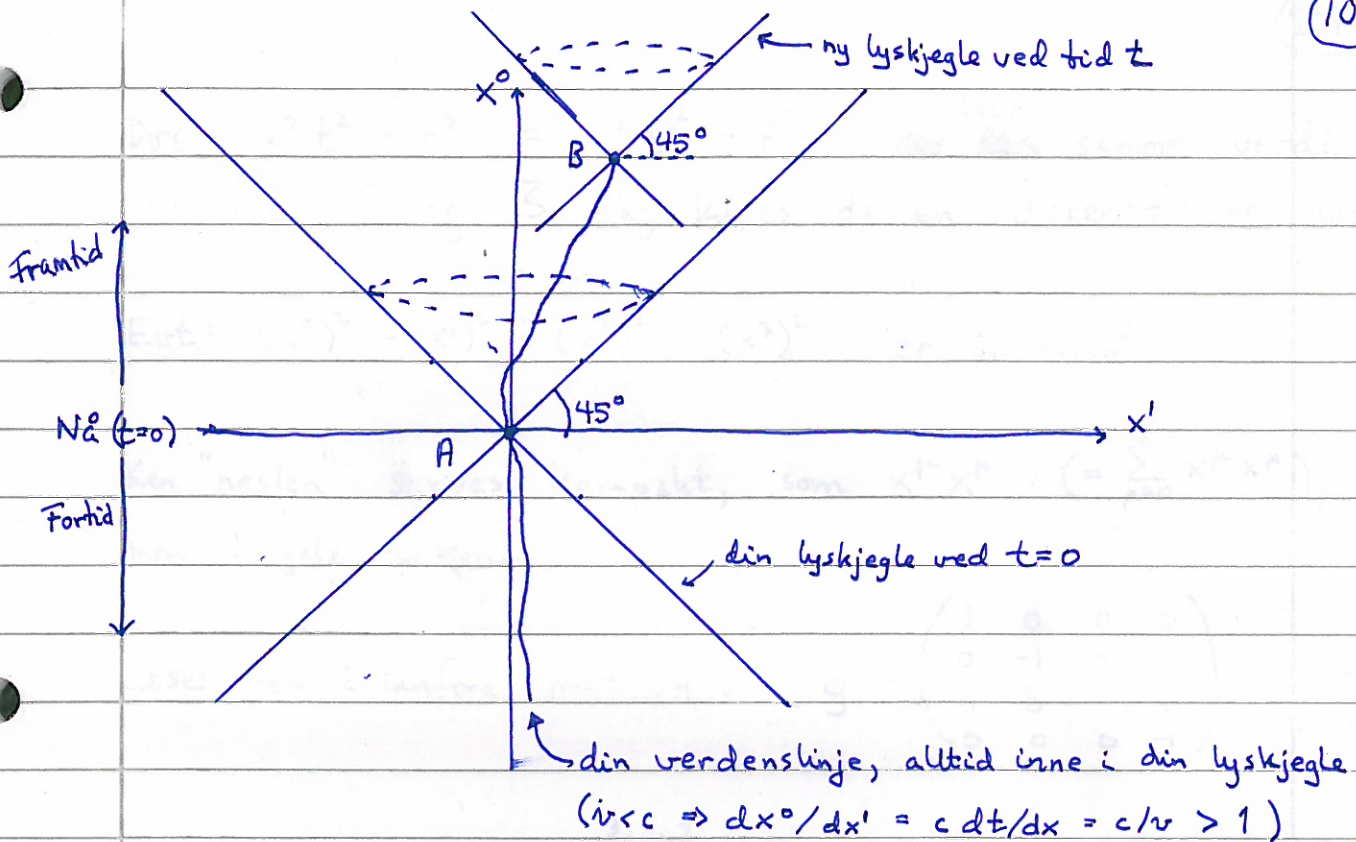
$\mathbb{R}: \quad S \rightarrow \bar{S}$ innebærer rotasjon omkring x-aksen

$\mathbb{L}: \quad S \rightarrow \bar{S}$ —"— fra system i ro til system i bevegelse

Minkowski-diagram. "Space-time".



[Kommentar: Dropper x^2 og x^3. Har plass til en av dem, men ikke begge!]



Invariante størrelser. Metrikk.

Hendelser: (f.eks. din posisjon og tid)

A: $x^\mu_A = (0, 0, 0, 0)$

B: $x^\mu_B = (ct, x, y, z)$

4-forflytning: $x^\mu = x^\mu_B - x^\mu_A = (ct, x, y, z)$

Ser på $(ct)^2 - r^2$ i S og $\bar{S}$: $(\bar{y}^2 = y^2,\ \bar{z}^2 = z^2)$

$$
\begin{aligned}
(c\bar{t})^2 - \bar{x}^2 &= \gamma^2\left[(ct - \tfrac{v}{c}x)^2 - (x - vt)^2\right] \\
&= \gamma^2\left[c^2t^2 - \cancel{2v}xt + \tfrac{v^2}{c^2}x^2 - x^2 + \cancel{2v}xt - v^2t^2\right] \\
&= \frac{c^2}{c^2 - v^2}\left[(c^2 - v^2)t^2 - (1 - v^2/c^2)x^2\right] \\
&= c^2t^2 - x^2
\end{aligned}
$$

Dvs: $c^2t^2 - r^2 = c^2\bar{t}^2 - \bar{r}^2$ ~~[illegible]~~ har samme verdi i S og $\bar{S}$, og kalles da en (Lorentz) invariant

Evt: $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ er invariant

Kan "nesten" skrives kompakt, som $x^\mu x^\mu$ $\left(= \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x^\mu\right)$, men 3 gale fortegn...

Løses ved å innføre metrikk: $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad \left(= \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu\right)$ er invariant!

$(g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,$ resten av $g_{\mu\nu} = 0)$

Innfør kovariant 4-vektor med indeks nede:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \left(= \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu\right)$$

Med indeks oppe, x^μ: kontravariant 4-vektor.

Dermed: $x_\mu x^\mu$ er invariant! (Dvs: $x_\mu x^\mu = \bar{x}_\mu \bar{x}^\mu$)

Ser at $x_0 = x^0$, mens $x_1 = -x^1$, ~~[illegible]~~ $x_2 = -x^2$, $x_3 = -x^3$.

Fra ko- til kontravariant: $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$; $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$
(evt: $g^{-1} = g$)

Generelt: For vilkårlige 4-vektorer a^μ og b^μ er skalarproduktet $a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3$ en invariant størrelse, dvs samme verdi i alle inertialsystem.

Energi og impuls

Fra sist: $\underbrace{E^2 - (cp)^2}_{\text{invariant!}} = \underbrace{(mc^2)^2}_{\text{invariant}}$, evt: $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2$

invariant! $\Leftarrow$ invariant

Energi-impuls-4-vektor (evt 4-impuls):

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = (\gamma mc, \gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_z)$$
$$= (\gamma mc, m\eta_x, m\eta_y, m\eta_z)$$

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = \left(\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z\right) = (\gamma mc, -m\eta_x, -m\eta_y, -m\eta_z)$$

$$\Rightarrow \quad p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2 \ ; \ \underline{\text{invariant}}$$

Ikke forelest 27.11.10

4-hastighet: $\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$; $d\tau = dt/\gamma$ = egentiden, en $\underline{\text{invariant}}^{*}$,
(fordi $d\bar{x}_\mu d\bar{x}^\mu = c^2 d\bar{t}^2 \to c^2 d\tau^2$ for partikkel i ro i $\bar{S}$)

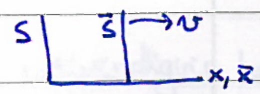
$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{dt/\gamma} = \gamma c, \quad \eta^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \gamma \frac{dx^1}{dt} = \gamma v_x \quad \text{osv.}$$

$$\Rightarrow \eta^\mu = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) \qquad (\Rightarrow p^\mu = m\eta^\mu)$$

Er $\eta_\mu \eta^\mu$ invariant?

Ja: $\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2 (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \frac{c^2}{c^2 - v^2}(c^2 - v^2) = c^2$; ok!

LT for energi og impuls

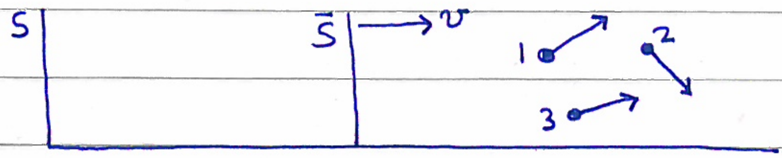
Siden p^μ transf. som x^μ, må vi ha: (med )

$\bar{p}^0 = \gamma p^0 - \beta\gamma p^1$, dvs $\bar{E} = \gamma(E - v p_x)$

$\bar{p}^1 = \gamma p^1 - \beta\gamma p^0$, dvs $\bar{p}_x = \gamma(p_x - vE/c^2)$

$\bar{p}^2 = p^2$, $\bar{p}^3 = p^3$, dvs $\bar{p}_y = p_y$, $\bar{p}_z = p_z$

Generalisering til system med flere partikler:



Total energi i S: $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots = \sum_i E_i$
—— " —— $\bar{S}$: $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \ldots = \sum_i \bar{E}_i$
Total impuls i S: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = \sum_i \vec{p}_i$
—— " —— $\bar{S}$: $\vec{\bar{p}} = \vec{\bar{p}}_1 + \vec{\bar{p}}_2 + \vec{\bar{p}}_3 + \ldots = \sum_i \vec{\bar{p}}_i$

Da er $E^2 - (cp)^2 = \bar{E}^2 - (c\bar{p})^2 = E_0^2$, dvs invariant
(evt $p_\mu p^\mu = \bar{p}_\mu \bar{p}^\mu$)

Hit 22.11.10

E_0 = total energi målt i S_0 der $\vec{p}_0 = 0$ (dvs: null total impuls)

Ikke forelest 22.11.10

Merk: generelt er $\sum_i E_{k,i} \neq 0$ selv om $\vec{p}_0 = \sum_i \vec{p}_{i,0} = 0$
$\Rightarrow E_0 \neq \sum_i m_i c^2$ generelt

For prosesser og kollisjoner gjelder ("før" → "etter"):

$$\left.\begin{aligned} E_{før} &= E_{etter} \\ \vec{P}_{før} &= \vec{P}_{etter} \end{aligned}\right\}$$ Bevarte størrelser (ikke invariante)

$E^2 - (pc)^2 = \bar{E}^2 - (\bar{p}c)^2$ Invariant (ikke nødvendigvis bevart)

$M = \bar{M}$ (total masse) Invariant (—— " ——)

[Torsdag 25.11.10: Eksempler, oppgaver.]