Uke 41
11.10.10
F22 + 23

Elektromagnetiske bølger (YF 32, LHL 28)

Skal vise:

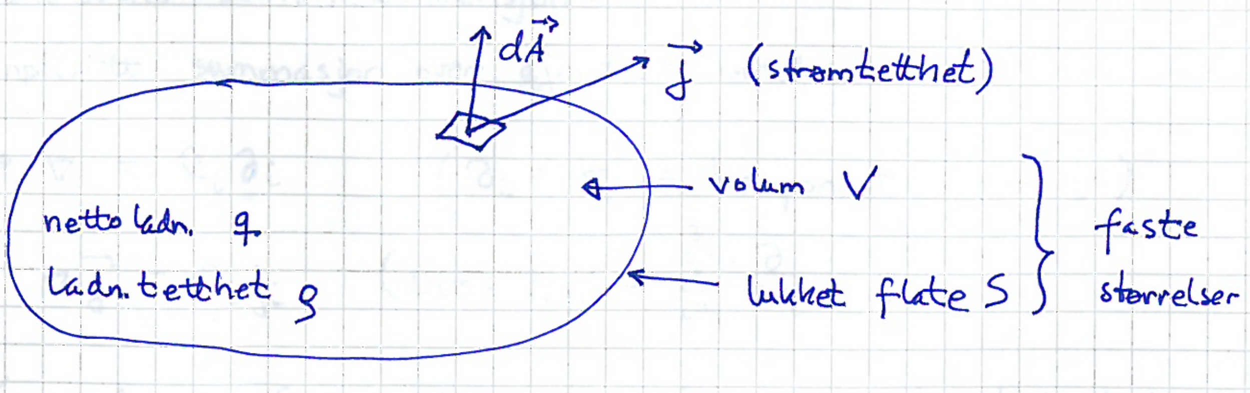
Maxwells ligninger $\Rightarrow$ Bølgeligning for $\vec{E}$ og $\vec{B}$

Plan:

1. Kontinuitetsligningen (Krav om ladningsbevarelse)
2. Ampere - Maxwells lov (Maxwells korreksjon av Amperes lov)
3. Maxwells ligninger på differensialform
4. Bølgeligning for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ (først: i vakuum), utledning fra Maxwells ligninger

1. Kont. lign. [YF 14.4, LHL 18.5, LL 8.6]

Elektrisk ladning er bevart. (Empirisk lov)



Netto ladn. i V: $q = \int_V dq = \int_V \rho \, dV$

Netto strøm gjennom S (ut): $I = \oint_S dI = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$

Pga ladningsbevarelse: $I = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dq}{dt} + I = 0}$ Kont. lign.

På differensialform: Divergensteoremet!

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{j})\, dV$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

fast V

siden V $\Longrightarrow$ er vilkårlig

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Divergens til vektor:

$$\nabla \cdot \vec{j} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(j_x \hat{x} + j_y \hat{y} + j_z \hat{z}\right)$$

$$= \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Meget nyttig!

Smart notasjon:

$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$

$$\Rightarrow \nabla = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \hat{x}_i \partial_i$$

Einsteins summekonvensjon:

Implisitt summasjon over gjentatte indekser

$$\Rightarrow \nabla = \hat{x}_i \partial_i \qquad (\partial_i = \nabla_i = \text{komponent } i \text{ av } \nabla)$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = \partial_i j_i \qquad \left(\text{Dvs: } \partial_i j_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} j_i\right)$$

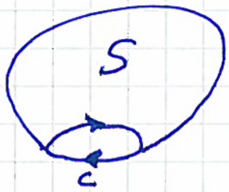
Kan videre innføre $x_0 = c \cdot t$, $j_0 = c \cdot \rho$ (c = lyshast. i vak.)

Kont. ligen. blir da: $\boxed{\partial_\mu j_\mu = 0}$ (underforstått $\sum_{\mu=0}^{3}$)

Vanlig med greske indekser for "4-vektor" (f.eks. (x_0, x_1, x_2, x_3)) og vanlige indekser for "3-vektor" (f.eks. (j_1, j_2, j_3))

2. Ampere – Maxwells lov (YF 29.7, LHL 23.8)

Amperes lov :



$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

Når S → lukket flate, vil $|c| \to 0$ (lengden av c)

$\Rightarrow$ $\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} \to 0$ og dermed $I = \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{A} = 0$

Dvs:

Ifølge Amperes lov: $I = \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{A} = 0$

Ifølge kont.lign.: $I = \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\overbrace{\int_V \rho\, dV}^{q}$

Konflikt dersom $\frac{dq}{dt} \neq 0$!

Gauss' lov : $q = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A}$

$\Rightarrow$ Maxwells korreksjon : $I \to I + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{\text{Forskyvningsstrøm}}$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}}$$ Ampere–Maxwells lov

Gir konsistens med kont.lign:

Lukket flate S $\Rightarrow$ $\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

og $\mu_0\left\{I + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A}\right\} = \mu_0\left\{I + \frac{dq}{dt}\right\} = 0$

OK!

3. Maxwells lign. på differensialform (LHL 28.1)

På integralform:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(lukket flate } S)$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad \text{(lukket kurve } c)$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(lukket flate } S)$$

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} \qquad \text{(lukket kurve } c)$$

Kilder: $q = \int_V \rho\, dV \qquad I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{A}$

Divergensteoremet: $\oint_S \vec{G}\cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla\cdot\vec{G})\, dV$

Stokes' teorem: $\oint_c \vec{G}\cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla\times\vec{G})\cdot d\vec{A}$

Dermed:

$$\left.\begin{array}{ccc} \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} & \overset{\text{Div.}}{\underset{\text{thm.}}{=}} & \int_V (\nabla\cdot\vec{E})\, dV \\ \text{Gauss' lov } \| & & \| \\ \frac{1}{\varepsilon_0} q & = & \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0}$$

Vilkårlig $\{S, V\}$

$$\left.\begin{array}{ccc} \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} & \overset{\text{Div.}}{\underset{\text{thm.}}{=}} & \int_V (\nabla\cdot\vec{B})\, dV \\ \| \text{ "Gauss' lov"} & & \\ 0 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{A}$$

Faraday-Henry $\quad \parallel \qquad\qquad \parallel$

$$-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} \overset{\text{fast}}{\underset{S}{=}} -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_S (\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{A}$$

Ampere-Maxwell $\quad \parallel \qquad\qquad \parallel$

$$\mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} \overset{\text{fast}}{\underset{S}{=}} \mu_0\int_S\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

Curl til vektor:

$$\nabla\times\vec{G} = \hat{x}\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)$$

Smart notasjon:

Levi-Civita-tensoren: $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & i,j,k \text{ alle ulike og sykliske } (123, 312, 231) \\ -1 & \text{———} \parallel \text{——— antisykliske } (132, 321, 213) \\ 0 & \text{minst to like indekser} \end{cases}$

Dermed, med Einsteins summekonvensjon:

$$(\nabla\times\vec{G})_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,G_k$$

Sjekk, $i=1$, dvs x-komp. av $\nabla\times\vec{G}$:

$$\varepsilon_{1jk}\,\partial_j\,G_k = \varepsilon_{123}\,\partial_2 G_3 + \varepsilon_{132}\,\partial_3 G_2 \quad \text{(resten null)}$$

$$= \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \qquad \text{OK!}$$

[Sjekk $i=2$ og $i=3$ selv! Vis at $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$!]

4. Bølgeligning for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i vakuum

Vakuum $\Rightarrow \quad \rho = 0, \quad \vec{j} = 0$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

What to do ?! Ser at de koblede ligningene dekobles ved å ta curl av dem:

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B}) \overset{A-M}{=} -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E}) \overset{F-H}{=} -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Forenkler venstre-sidene:

$$\begin{aligned}
(\nabla\times\nabla\times\vec{G})_i &= \varepsilon_{ijk}\,\partial_j(\nabla\times\vec{G})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\varepsilon_{klm}\,\partial_l\,G_m \\
&= \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm}\,\partial_j\partial_l\,G_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,\partial_j\partial_l\,G_m \\
&= \partial_i(\partial_m G_m) - \partial_j\partial_j G_i \\
&= \partial_i(\nabla\cdot\vec{G}) - \nabla^2 G_i
\end{aligned}$$

Dvs:

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = \nabla\underbrace{(\nabla\cdot\vec{E})}_{=0} - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{B} = \nabla\underbrace{(\nabla\cdot\vec{B})}_{=0} - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$$

Bølgelign. for $\vec{E}$ og $\vec{B}$. Bølgehast: $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2} \approx 3\cdot10^8\ \mathrm{m/s}$ = Lyshast. i vakuum.

lit 11.10.10