

## Løsningsforslag til øving 1

## Oppgave 1

a) Vi antar at Hookes lov,  $F = kx$ , gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

med  $\omega^2 = k/m$ . Ligningen har løsning  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Amplituden  $A$  og fasekonstanten  $\phi$  fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene  $x(0) = x_0$  og  $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ . Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A \cos \phi$$

og

$$v_0 = -\omega A \sin \phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan \frac{v_0}{x_0 \omega}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos \arctan v_0/x_0 \omega}$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \frac{v_0^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos \frac{x_0}{A} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}$$

b) Siden vi ikke har noe demping i systemet, er den totale energien  $E$  bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der  $x = x_{\max} = A$  og  $v = 0$ :

$$E = E_p^{\max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k(x_0^2 + mv_0^2/k) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Det endelige svaret her gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved  $t = 0$ ,  $E_{p0} + E_{k0}$ , hvilket jo også må tilsvare den totale energien.

c) Skriver vi løsningen på formen  $x(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$ , har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega B \sin \omega t + \omega C \cos \omega t$$

og dermed, ved hjelp av  $x(0) = x_0$  og  $\dot{x}(0) = v_0$ ,

$$B = x_0$$

og

$$C = v_0/\omega$$

d) Maksimalt utsving:

$$x_{\max} = A = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0 \sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 + mv_0^2/k)} = v_0 \sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0 \sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$E_{p0} = 0.5 \cdot 10 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{2000}$$

$$E_{k0} = 0.5 \cdot 0.100 \cdot 0.10^2 = \frac{1}{2000}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI-enheter underveis. Følgelig er  $x_{\max} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$  cm og  $v_{\max} = \sqrt{2}v_0 \simeq 14$  cm/s.

## Oppgave 2

Bevegelsesligning for klossen:

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

Her har vi valgt positiv  $x$ -retning nedover. Uten tyngdefelt til stede ( $g = 0$ ) er klossens likevektsposisjon  $x = 0$ . I tyngdefeltet bestemmes den nye likevektsposisjonen  $\Delta x$  ved å sette total kraft lik null, følgelig

$$\begin{aligned} -k\Delta x + mg &= 0 \\ \Delta x &= mg/k \end{aligned}$$

Med ny posisjonsvariabel

$$y = x - \Delta x$$

får vi bevegelsesligningen

$$m\ddot{y} = -k(y + \Delta x) + mg = -ky$$

som betyr at klossen vil svinge harmonisk med vinkelfrekvens  $\omega = \sqrt{k/m}$  omkring likevektsposisjonen  $y = 0$ , dvs  $x = \Delta x = mg/k$ . Med tallverdiene fra oppgave 1 har vi

$$\Delta x = 0.100 \cdot 9.8/10 = 9.8 \text{ cm}$$

### Oppgave 3

a) Newtons 2. lov gir oss klossenes bevegelsesligninger. La oss f.eks. velge positiv retning for utsving fra likevekt mot høyre. I den nederste figuren har vi da  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  og  $x_1 > x_2$ , slik at fjæra til venstre er strukket mens den i midten og den til høyre er presset sammen. Venstre fjær er strukket en lengde  $x_1$  og virker på masse 1 med en kraft mot venstre. Fjæra i midten er sammenpresset en lengde  $x_1 - x_2$  og virker på masse 1 med en kraft mot venstre og masse 2 med en kraft mot høyre. Fjæra til høyre er sammenpresset en lengde  $x_2$  og virker på masse 2 med en kraft mot venstre. Dermed har vi kraft på masse 1:

$$F_1 = -kx_1 + 2k(x_2 - x_1) = -3kx_1 + 2kx_2$$

og kraft på masse 2:

$$F_2 = -kx_2 - 2k(x_2 - x_1) = 2kx_1 - 3kx_2$$

Newtons 2. lov gir da

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -3kx_1 + 2kx_2 \\ m\ddot{x}_2 &= 2kx_1 - 3kx_2 \end{aligned}$$

b) Innsetting av antatte løsninger for  $x_1(t)$  og  $x_2(t)$  gir ligningene

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A &= k(-3A + 2B) \\ -m\omega^2 B &= k(2A - 3B) \end{aligned}$$

etter at vi har strøket en felles faktor  $\cos(\omega t + \phi)$  i alle ledd. Fra hver av disse ligningene kan vi finne et uttrykk for forholdet  $A/B$ :

$$\begin{aligned} A/B &= 2k/(3k - m\omega^2) \\ A/B &= (3k - m\omega^2)/2k \end{aligned}$$

Ettersom venstre side i disse ligningene er like store, må også høyre side være det. Dermed:

$$2k/(3k - m\omega^2) = (3k - m\omega^2)/2k$$

eller

$$m^2\omega^4 - 6km\omega^2 + 5k^2 = 0$$

Dette er en 2.gradsligning for  $\omega^2$ , med løsninger

$$\omega^2 = \frac{6km \pm \sqrt{36k^2m^2 - 20k^2m^2}}{2m^2} = \frac{6km \pm 4km}{2m^2}$$

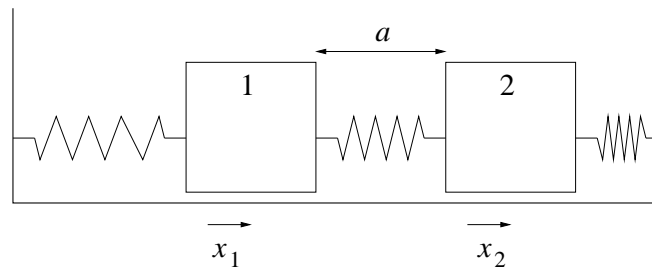
dvs  $k/m$  og  $5k/m$ . De mulige vinkelfrekvensene som klossene kan svinge med er følgelig  $\omega_a = \sqrt{k/m}$  og  $\omega_s = \sqrt{5k/m}$ , som vi skulle vise.

c) Vi finner sammenhengen mellom  $A$  og  $B$  for hver av de to vinkelfrekvensene ved å sette inn i det ene eller andre uttrykket ovenfor for forholdet  $A/B$ :

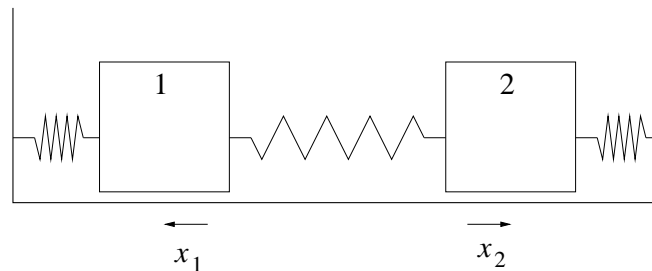
$$\begin{aligned} A_a/B_a &= 2k/(3k - m\omega_a^2) = 1 \\ A_s/B_s &= 2k/(3k - m\omega_s^2) = -1 \end{aligned}$$

Det betyr at i den "antisymmetriske moden" er  $x_1 = x_2$ , og de to massene svinger fram og tilbake med samme fase, uten at fjæra i midten strekkes eller presses sammen. I den "symmetriske moden" er  $x_1 = -x_2$ , og de to massene svinger i motfase, slik at fjæra i midten strekkes og presses sammen dobbelt så mye som fjærene til venstre og høyre.

Antisymmetrisk mode:



Symmetrisk mode:



I den antisymmetriske moden påvirkes hver av de to massene kun av krafta fra ei fjær, ettersom fjæra i midten verken strekkes eller presses sammen. Med andre ord, hver masse svinger på samme måte som om den andre ikke var til stede, og vi må ha  $\omega_a^2 = k/m$ .

I den symmetriske moden er fjæra til venstre strukket en lengde  $x_1$  og fjæra i midten er sammenpresset en lengde  $2x_1$  når masse 1 er i posisjon  $x_1$ . Da blir total kraft på masse 1 lik  $-5kx_1$ . Med andre ord, masse 1 svinger som om den var festet til ei fjær med fjærkonstant  $5k$ , slik at vi må ha  $\omega_s^2 = 5k/m$ . (Tilsvarende argument kan gjennomføres for masse 2.)

Vi ser at dette stemmer med resultatet i punkt b).

Kommentar: For å få systemet til å svinge i en av disse to modene, kan vi ikke ha vilkårlige initialbetingelser. Vi ser f.eks. at hvis vi skyver begge massene like langt i samme retning og slipper dem, vil systemet svinge i den antisymmetriske moden. Skyves de to massene like langt i hver sin retning, vil det svinge i den symmetriske moden. Den *generelle* svingebevegelsen vil være en *superposisjon* av begge moder:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\x_2(t) &= A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) - A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)\end{aligned}$$

Her har vi 4 ubestemte konstanter,  $A_a$ ,  $A_s$ ,  $\phi_a$  og  $\phi_s$ , som kan fastlegges hvis vi kjenner (f.eks.) posisjon og hastighet til hver av de to massene ved (f.eks.)  $t = 0$ .