Løsningsforslag til øving 12

Oppgave 1

a) I følge Galileo: ($\overline{S}$ = $\overline{\text{S}}$iv, S = Sam, T = Toget)

$$v^G_{\overline{S}S} = v_{\overline{S}T} + v_{TS}$$

I følge Einstein:

$$v^E_{\overline{S}S} = \frac{v_{\overline{S}T} + v_{TS}}{1 + v_{\overline{S}T}v_{TS}/c^2}$$

Dermed:

$$\frac{v^G_{\overline{S}S} - v^E_{\overline{S}S}}{v^G_{\overline{S}S}} = v_{\overline{S}T}v_{TS}/c^2 = 3.4 \cdot 10^{-14}\,\%$$

Her har vi brukt at

$$\frac{1}{1 + v_{\overline{S}T}v_{TS}/c^2} \simeq 1 - v_{\overline{S}T}v_{TS}/c^2$$

når hastighetene $v_{\overline{S}T}$ og v_{TS} er små i forhold til c, og det er jo tilfelle her. Med andre ord: Ingen stor feil å bruke galileisk relativitet her.

b)

$$v_{\overline{S}S} = \frac{c/2 + 3c/4}{1 + (1/2)\cdot(3/4)} = \frac{10c}{11}$$

Legg merke til at $\overline{\text{S}}$ivs hastighet i forhold til Sam er mindre enn c. I følge Galileo ville den ha vært $5c/4$.

c) Vi bruker tipset i oppgaven og innfører dimensjonsløse størrelser $\beta = v_{\overline{S}S}/c$, $\beta_1 = v_{\overline{S}T}/c$ og $\beta_2 = v_{TS}/c$. Oppgaven blir å vise at hvis både $\beta_1 < 1$ og $\beta_2 < 1$, så er også $\beta < 1$, eventuelt $\beta^2 < 1$:

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}\right)^2 \\
&= \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2}{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2} \\
&= \frac{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2}{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2} - \frac{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2}{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2} \\
&= 1 - \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 + \beta_1\beta_2)^2} \\
&< 1
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi kjenner $\overline{\text{S}}$ivs hastighet i forhold til Sam:

$$v_{\overline{S}S} = \frac{5c}{8}$$

Kulas hastighet i forhold til Sam:

$$v_{KS} = \frac{v_{KA} + v_{AS}}{1 + v_{KA}v_{AS}/c^2} = \frac{8c}{13}$$

(Her er hele tiden v_{ij} hastigheten til i i forhold til j, og A, K og S står for Arne, Kula og Sam.) Altså har kula litt mindre hastighet enn $\overline{\text{S}}$iv, slik at $\overline{\text{S}}$iv overlever.
Vi kan bruke Einsteins regel for addisjon av hastigheter til å bestemme alle fires hastigheter i forhold til hverandre. Oppsummert i en tabell (med alle hastigheter i enheten c):

hastigheten til... → ...i forhold til ↓	S	A	K	$\overline{S}$
S	0	3/8	8/13	5/8
A	-3/8	0	5/16	16/49
K	-8/13	-5/16	0	1/64
$\overline{S}$	-5/8	-16/49	-1/64	0

Vi ser at $\overline{\text{S}}$iv har større hastighet enn kula, uansett hvem vi spør.

Oppgave 3

Avstanden fra deg til klokke nr 201 er $200 \cdot 300000$ km. Lyset bruker 200 sekunder på denne strekningen. Følgelig *ser* du at klokke nr 201 viser 11:56:40 når klokke nr 1 viser 12:00:00. Men du *observerer*, dvs *måler*, at klokke nr 201 er 12:00:00, fordi du vet at du må korrigere for at lyset har reist $200 \cdot 300000$ km for å nå fram til øyet ditt.

Oppgave 4

Vi starter med å skrive $\boldsymbol{u}$ og $\overline{\boldsymbol{u}}$ på komponentform:

$$\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\overline{\boldsymbol{u}} = (\overline{u}_x, \overline{u}_y, \overline{u}_z) = \left(\frac{d\overline{x}}{d\overline{t}}, \frac{d\overline{y}}{d\overline{t}}, \frac{d\overline{z}}{d\overline{t}}\right)$$

Deretter bruker vi lorentztransformasjonene,

$$\begin{aligned} d\overline{x} &= \gamma(dx - vdt) \\ d\overline{y} &= dy \\ d\overline{z} &= dz \\ d\overline{t} &= \gamma(dt - vdx/c^2) \end{aligned}$$

direkte og finner

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_x &= \frac{dx - vdt}{dt - vdx/c^2} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \\
\overline{u}_y &= \frac{dy}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \\
\overline{u}_z &= \frac{dz}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}
\end{aligned}
$$

Oppgave 5

$\overline{\text{S}}$iv reiser i alt en avstand $\Delta x = 24$ lysår. Hastigheten hennes er $v = 0.98c$. Hun må dermed ha brukt en tid $\Delta t = \Delta x/v = 24.490$ år. Sam er med andre ord ca 42 og et halvt år når $\overline{\text{S}}$iv kommer hjem.
På grunn av tidsdilatasjon går $\overline{\text{S}}$ivs klokker betydelig langsommere (både den klokka hun har på armen og hennes biologiske klokke). Hun måler et tidsforbruk $\Delta\overline{t} = \Delta t/\gamma = 4.873$ år. $\overline{\text{S}}$iv er dermed snaut 23 år når hun kommer hjem.

"Paradokset": Vil det ikke fra $\overline{\text{S}}$ivs synsvinkel være omvendt? Dvs, slik at det er Sam som reiser med hastighet $0.98c$ mens $\overline{\text{S}}$iv forholder seg i ro? I såfall burde $\overline{\text{S}}$iv konkludere med at det er Sam som er den yngste av de to når hun kommer hjem.
Kortforklaringen på at dette *ikke* er tilfelle: $\overline{\text{S}}$iv er ikke i ett og samme inertialsystem under hele reisen. Hun må gjennomgå en akselerasjon i det hun snur. Sam, derimot, er hele tiden i samme inertialsystem, så vi må stole på ham. Altså *er* Sam eldre enn $\overline{\text{S}}$iv.

Problemet kan analyseres noe mer inngående: Vi innser raskt at vi her har med *tre* inertialsystem å gjøre: S, der Sam hele tiden er i ro; $\overline{S}$, der romskipet og $\overline{\text{S}}$iv er i ro på utreisen; $\hat{S}$, der romskipet og $\overline{\text{S}}$iv er i ro på hjemreisen. Ulike hendelser, og dermed ulike lengder og tidsintervaller, i de ulike inertialsystemene vil være relatert via lorentztransformasjonene (LT). Vi velger hendelsen *avreise* (A) ved tidspunktet $t_A = \overline{t}_A = \hat{t}_A = 0$ og i posisjonen $x_A = \overline{x}_A = \hat{x}_A = 0$. Hendelsen A definerer med andre ord et felles origo for de tre inertialsystemene. Positiv retning i rommet velges fra jorda og mot Epsilon Indi (EI). Det betyr at aktuelle relative hastigheter er

$$
\begin{aligned}
v_{\overline{S}S} &= v = 0.98c \\
v_{\hat{S}S} &= -v = -0.98c \\
v_{\overline{S}\hat{S}} &= \frac{v_{\overline{S}S} + v_{S\hat{S}}}{1 + v_{\overline{S}S} v_{S\hat{S}}/c^2} = \frac{v + v}{1 + v^2/c^2} \simeq 0.9998c
\end{aligned}
$$

Vi trenger her bare å bruke de to første, som har samme lorentzfaktor

$$
\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5.025
$$

Neste hendelse (B) er at $\overline{\text{S}}$iv ankommer EI. I Sams verden S er da $x_B = 12$ (lysår) og $t_B = x_B/v = 12/0.98 = 12.245$ (år). LT gir oss "koordinatene" for hendelse B i $\overline{S}$ og $\hat{S}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_B &= \gamma(x_B - vt_B) = 0 \\
\overline{t}_B &= \gamma(t_B - vx_B/c^2) = \gamma\frac{x_B}{v}(1 - v^2/c^2) = \frac{x_B}{\gamma v} = \frac{12}{5.025 \cdot 0.98} = 2.437 \\
\hat{x}_B &= \gamma(x_B + vt_B) = 2\gamma x_B = 2 \cdot 5.025 \cdot 12 = 120.605 \\
\hat{t}_B &= \gamma(t_B + vx_B/c^2) = \gamma t_B(1 + v^2/c^2) = 120.625
\end{aligned}
$$

Dette betyr at $\overline{\text{S}}$ivs klokke viser 2.437 umiddelbart før hun snur. Det at hun snur innebærer at hun hopper fra inertialsystemet $\overline{S}$ til $\hat{S}$. Riktig klokke i $\hat{S}$ viser 120.625. Følgelig må $\overline{\text{S}}$iv stille klokka si 118.188 år fram hvis hun ønsker at klokka hennes skal vise det samme som alle andre klokker i $\hat{S}$. Dette betyr selvsagt ikke at $\overline{\text{S}}$iv plutselig har blitt 118.188 år eldre. Hun er fortsatt $18 + 2.437 = 20.437$ år gammel.
Neste hendelse (C) er at $\overline{\text{S}}$iv kommer hjem. I Sams verden S har denne hendelsen koordinatene $x_C = 0$ og $t_C = 2t_B = 24.490$. LT gir oss igjen de tilsvarende koordinatene i $\overline{S}$ og $\hat{S}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_C &= \gamma(x_C - vt_C) = -120.601 \\
\overline{t}_C &= \gamma(t_C - vx_C/c^2) = \gamma t_C = 123.062 \\
\hat{x}_C &= \gamma(x_C + vt_C) = \gamma v t_C = 120.601 \\
\hat{t}_C &= \gamma(t_C + vx_C/c^2) = \gamma t_C = 123.062
\end{aligned}
$$

Her må vi holde tunga rett i munnen: Turen hjem, målt med $\overline{\text{S}}$ivs klokke, varte $\hat{t}_C - \hat{t}_B = 123.062 - 120.625 = 2.437$ år (enten hun stilte klokka eller ikke). Ikke overraskende tok det like lang tid begge veier. $\overline{\text{S}}$iv konkluderer med at hun har blitt 4.874 år eldre siden avreise (hendelse A). Altså er Sam og $\overline{\text{S}}$iv enige om $\overline{\text{S}}$ivs alder, 22.874 år, ved hjemkomst (hendelse C).

Det gjenstår da kun å kontrollere at de også er enige om Sams alder ved hjemkomst. $\overline{\text{S}}$iv må nå forholde seg til inertialsystemene $\hat{S}$ og S. Hele reisen, fra hendelse A til hendelse C tok en tid $\hat{t}_C - \hat{t}_A = 123.062$ år. Sett fra $\hat{S}$ har inertialsystemet S hele tiden hatt konstant hastighet $v = 0.98c$. En observatør i $\hat{S}$ (og det er jo nettopp det $\overline{\text{S}}$iv er ved hjemkomst!) vil da, med rette, hevde at en tidsmåling i S mellom hendelsene A og C må vise

$$
\frac{\hat{t}_C - \hat{t}_A}{\gamma} = \frac{123.062}{5.025} = 24.490
$$

Og det er nettopp hva Sam selv hevder han har målt, så Sam og $\overline{\text{S}}$iv er også enige om Sams alder ved hjemkomst, 42.490 år.