FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2010.

Løsningsforslag til øving 2

a) Kirchhoffs spenningsregel sier at summen av alle potensialendringer rundt en lukket krets skal være lik null. Det er ikke annet enn kravet om energibevarelse, eller mer presist, at en elektrisk ladning skal ha en entydig potensiell energi i en hvilken som helst posisjon i kretsen. Vi har oppgitt at spenningsfallet over motstanden er RI, over kondensatoren q/C og over induktansen $L\dot{I}$. Dermed:

$$V_0 \cos \omega t - L\dot{I} = RI + \frac{q}{C},$$

og ettersom $I = \dot{q}$ har vi

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 \cos \omega t.$$

(Minustegn foran $L\dot{I}$ fordi det induseres en *motspenning* i induktansen, dvs den prøver å motvirke endringer i strømstyrken I.)
Ved direkte sammenligning mellom ligningene for x og q ser vi at

- resistansen R er analog til dempingskonstanten b
- invers kapasitans $1/C$ er analog til fjærkonstanten k
- spenningsamplituden V_0 er analog til kraftamplituden F_0
- ladningen q er analog til utsvinget x
- strømmen I er analog til hastigheten $\dot{x}$

Disse analogiene mellom mekaniske og elektriske svingesystemer kan utnyttes i praksis. For det første kan man modellere et potensielt stort og utilgjengelig mekanisk system med en liten og grei elektrisk krets på laben. For det andre kan elektriske kretser oversettes til mekaniske svingesystemer, noe som kan gi en lettere intuitiv forståelse for hvordan systemet vil oppføre seg.

b) Med $q(t) = q_0 \sin(\omega t - \alpha)$ har vi

$$\dot{q} = \omega q_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

og

$$\ddot{q} = -\omega^2 q_0 \sin(\omega t - \alpha)$$

som innsatt i ligningen for q gir

$$-L\omega^2 q_0 \sin(\omega t - \alpha) + R\omega q_0 \cos(\omega t - \alpha) + \frac{1}{C} q_0 \sin(\omega t - \alpha) = V_0 \cos \omega t$$

For å komme videre her, bruker vi $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ og $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Da har vi

$$\begin{aligned} L\omega^2 q_0 \sin\alpha \cos\omega t - L\omega^2 q_0 \cos\alpha \sin\omega t \quad &+ \quad R\omega q_0 \cos\alpha \cos\omega t + R\omega q_0 \sin\alpha \sin\omega t - \\ \frac{1}{C} q_0 \sin\alpha \cos\omega t + \frac{1}{C} q_0 \cos\alpha \sin\omega t \quad &- \quad V_0 \cos\omega t = 0 \end{aligned}$$

Dersom denne ligningen skal være oppfylt til alle tider, dvs for vilkårlig verdi av t, må leddene som inneholder $\sin \omega t$ og de som inneholder $\cos \omega t$ summere seg til null hver for seg. Følgelig:

$$\begin{aligned} -L\omega^2 q_0 \cos\alpha + R\omega q_0 \sin\alpha + \frac{1}{C} q_0 \cos\alpha &= 0 \\ L\omega^2 q_0 \sin\alpha + R\omega q_0 \cos\alpha - \frac{1}{C} q_0 \sin\alpha - V_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ettersom q_0 ikke er lik null, gir den første av disse ligningene

$$\begin{aligned} R\sin\alpha &= \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L\right)\cos\alpha \equiv X\cos\alpha \\ \tan\alpha &= \frac{X}{R} \end{aligned}$$

mens fra den andre har vi

$$q_0 = \frac{V_0/\omega}{R\cos\alpha + X\sin\alpha} = \frac{V_0/\omega}{R\cdot R/\sqrt{R^2+X^2} + X\cdot X/\sqrt{R^2+X^2}} = \frac{V_0/\omega}{\sqrt{R^2+X^2}}$$

Du ser at selv for et enkelt system som dette, ender vi opp med tildels grisete regning, og en kan jo spørre seg om det ikke er en enklere vei til målet. Svaret på det er ja, under forutsetning av at man er villig til å ta i bruk komplekse størrelser. I kommentar nr 2 litt lenger ned har jeg tatt med litt om dette. (Trolig kjent fra elektromagnetismen.)

Strømmen er

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \omega q_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

som betyr at strømamplituden er

$$I_0 = \omega q_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+X^2}}$$

I forelesningene utledet vi en halvverdibredde $\Delta\omega = b/m$ for resonanskurven $A(\omega)$, dvs utsvingsamplituden til den svingende massen m, når dempingskraften er $b\cdot v$. Siden de analoge størrelsene for den elektriske svingekretsen er R og L, blir halvverdibredden til resonanskurven $q_0(\omega)$

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} = 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$$

For det mekaniske svingesystemet er godhetsfaktoren $Q = \omega_0/\Delta\omega = \sqrt{k/m}\cdot m/b = \sqrt{km}/b$, så for den elektriske svingekretsen har vi

$$Q = \sqrt{L/C}/R = 100$$

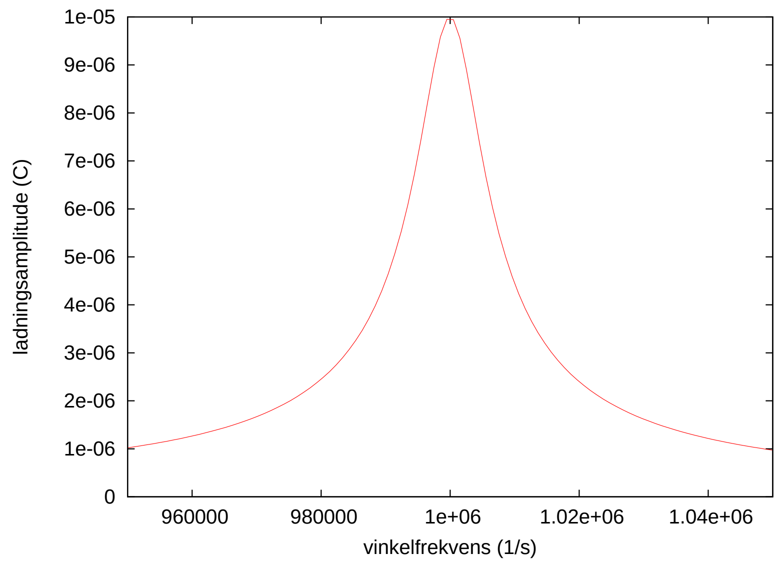
Resonansfrekvensen er

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$$

Med andre ord, en betydelig del av resonanstoppen ligger innenfor (vinkel-)frekvensintervallet $(990000, 1010000)\ \mathrm{s}^{-1}$, så det er snakk om en forholdsvis skarp og veldefinert resonans. Disse tallverdiene gir oss en god ide om hva vi bør velge som frekvensintervall når ladnings- og strømamplitudene skal plottes.
Følgende kommandoer i gnuplot,

```
gnuplot> set xrange [9.5e5:10.5e5]
gnuplot> set xlabel 'vinkelfrekvens (1/s)'
gnuplot> set ylabel 'ladningsamplitude (C)'
gnuplot> unset key
gnuplot> q(x) = 10/(x*sqrt(1+(1e-4*x-1e8/x)**2))
gnuplot> plot q(x)
```

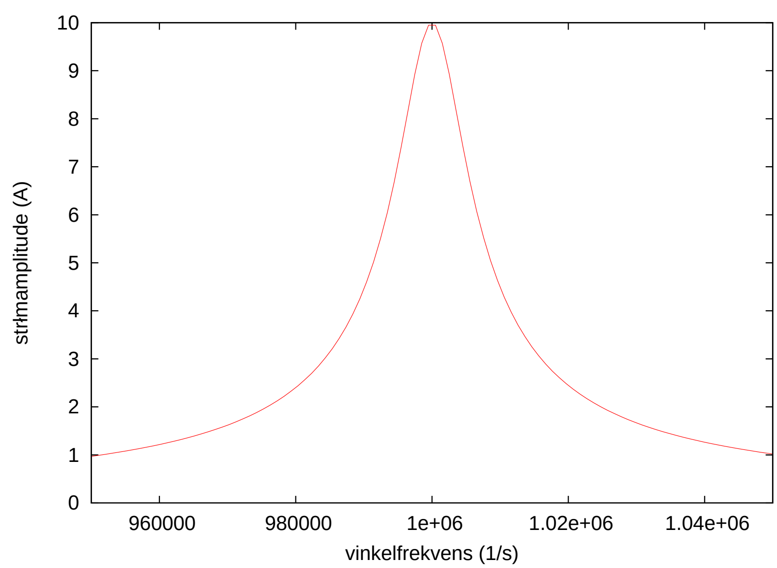
resulterer i denne figuren:



Ved å skrive inn også disse kommandoene,

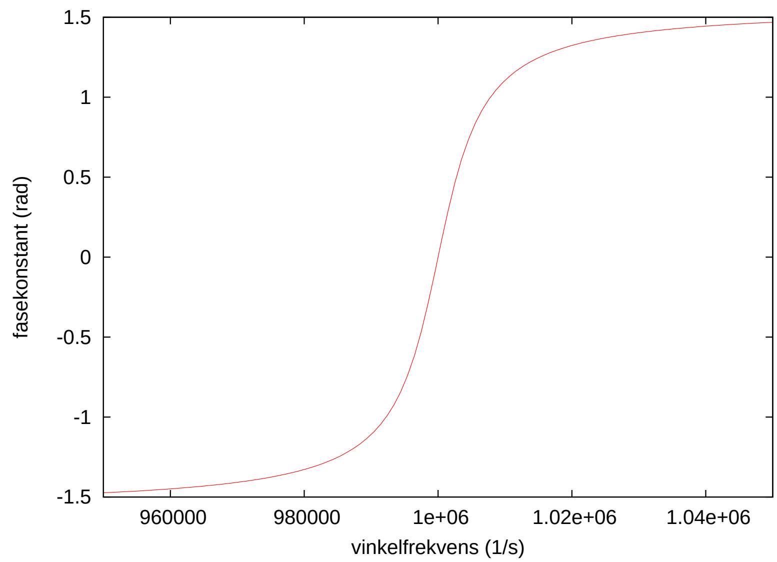
```
gnuplot> i(x) = x*q(x)
gnuplot> set ylabel 'stromamplitude (A)'
gnuplot> plot i(x)
```

får vi denne figuren:



Fasekonstanten α plottes ved å legge til disse linjene:

```
gnuplot> a(x) = atan(1e-4*x-1e8/x)
gnuplot> set ylabel 'fasekonstant (rad)'
gnuplot> plot a(x)
```



Hvis du bruker MATLAB eller Octave, skulle følgende linjer resultere i praktisk talt de samme tre figurene:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                Losningsforslag til oppgave (b) i Oving 2,                  %
%                Bolgefysikk, host 2010                                      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Vi skal plotte ladningsamplituden q0, stromamplituden i0 = omega*q0, og
% fasevinkelen alfa, alle tre som funksjoner av vinkelfrekvensen omega, omkring
% resonansfrekvensen omega0 = 1/sqrt(L*C) = 1E6 pr sek. Halvverdibredden
% Delta omega = R/L har her verdien 1E4 pr sek, slik at et passende intervall
% for omega er fra 9.5E5 til 10.5E5. Det skulle holde med 100 datapunkter paa
% dette intervallet:
omega = linspace(9.5E5,10.5E5,100);
% La oss for oversiktens skyld bruke symboler for de ulike storrelsene som
% inngaar, og gi dem de aktuelle tallverdiene, i SI-enheter:
V0 = 10;
R = 1.0;
L = 0.1E-3;
C = 10E-9;
% Kretsens reaktans er X(omega) = omega*L-1/omega*C:
X = omega.*L - 1./(omega.*C);
% Pass paa punktumene...!
% Stromamplituden:
```

```
i0 = V0./(sqrt(R^2+X.^2));
% Ladningsamplituden:
q0 = i0./omega;
% Fasekonstanten:
alfa = atan(X./R);
% Kommandoen figure ber om ny figur
% Forst q0:
figure;
plot(omega,q0);
xlabel('vinkelfrekvens (1/s)');
ylabel('ladningsamplitude (C)');
% Deretter i0:
figure;
plot(omega,i0);
xlabel('vinkelfrekvens (1/s)');
ylabel('stromamplitude (A)');
% Deretter alfa:
figure;
plot(omega,alfa);
xlabel('vinkelfrekvens (1/s)');
ylabel('fasekonstant (rad)');
```

Lag en vanlig tekstfil med din favoritteditor (vi, emacs, notepad, textpad eller lignende, eventuelt den innebygde editoren i MATLAB eller Octave), kall fila for eksempel plottresonans.m, start opp MATLAB eller Octave, og skriv ganske enkelt plottresonans. (Jeg har litt problem med figurene når jeg gjør dette med Octave på min Windows PC. I MATLAB går det helt fint, likeså med Octave på linux.)

Kommentarer:
1. Litt om generalisert motstand, eller *impedans*. (Impedansbegrepet er vel kjent fra f.eks. FY1003/TFY4155, og det blir mer om dette i f.eks. TFY4185 Måleteknikk.)

Hvis vi har en likestrømkrets, dvs med en konstant spenningskilde V_0, og finner at spenningskilden leverer en strøm I_0 til kretsen, kan vi bestemme kretsens (totale) elektriske motstand fra Ohms lov:

$$R = \frac{V_0}{I_0}$$

Hvis vi har en vekselstrømkrets, med en spenningskilde $V_0 \cos \omega t$, og finner at spenningskilden leverer en strøm $I_0 \cos(\omega t - \alpha)$ til kretsen, defineres kretsens generaliserte motstand, eller *impedans* Z på tilsvarende vis:

$$Z = \frac{V_0}{I_0}$$

For RCL-kretsen i denne øvingen finner vi at

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Med andre ord, impedansen Z avhenger av (vinkel-)frekvensen ω til den påtrykte spenningen. Impedansen er minimal dersom $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, kretsens resonansfrekvens. Da er strømstyrken maksimal, og strømmen $I(t)$ svinger i fase med den påtrykte spenningen.

Det er ingenting i veien for å benytte impedansbegrepet også i det mekaniske systemet, og mekanisk impedans defineres på tilsvarende vis, som forholdet mellom påtrykt kraft og resulterende hastighet:

$$Z = \frac{F_0}{v_0}$$

Benytter vi analogien mellom størrelsene i det mekaniske og det elektriske svingesystemet, kan vi uten videre skrive ned uttrykket for den mekaniske impedansen til systemet i oppgavens figur A:

$$Z = \sqrt{b^2 + (\omega m - k/\omega)^2}$$

2. Tvungen svingning: løsning ved hjelp av kompleks regning.

Et åpenbart irritasjonsmoment i løsningen av oppgave b ovenfor var det faktum at vi fikk inn både sinuser og cosinuser, og derfor måtte styre litt med trigonometriske relasjoner. Og vi innser fort at dette er uunngåelig dersom vi starter med å skrive løsningen for q (eventuelt x) som en cosinus eller en sinus: Derivasjon *en* gang gjør sinus om til cosinus, og omvendt, og hvis vi har demping, har vi jo nettopp et ledd som er proporsjonalt med den deriverte av q (eventuelt x). Løsningen på dette problemet har vi vært innom allerede, i og med at vi utledet løsningen av fri, dempede svingninger ved å starte med en *eksponentialfunksjon*. La oss forsøke det samme her: Vi setter

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

i det vi husker på at den fysiske påtrykte spenningen egentlig er

$$V_0 \cos \omega t = \mathrm{Re}\left(V_0 e^{i\omega t}\right)$$

Vi *kompliserer* altså problemet ved å innføre en kompleks representasjon av den reelle størrelsen $V(t)$, men samtidig *forenkler* vi problemet rent regneteknisk, i og med at eksponentialfunksjonen har seg selv som løsning, uansett hvor mange ganger vi deriverer den (eller integrerer den, for den saks skyld).
Det er vel nå temmelig opplagt at en partikulærløsning av differensialligningen for q må være på formen

$$q(t) = q_0 e^{i\omega t}$$

(og vi glemmer ikke at den fysiske ladningen får vi ved å ta realdelen av dette.) Innsetting gir

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) q_0 e^{i\omega t} = V_0 e^{i\omega t}$$

siden vi får ned en faktor $i\omega$ for hver gang vi deriverer $q(t)$ mhp t. Dermed får vi

$$q_0 = \frac{V_0}{-\omega^2 L + i\omega R + 1/C} = \frac{V_0}{i\omega\left(R + i\omega L + 1/i\omega C\right)}$$

Strømmen blir

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = q_0 i\omega e^{i\omega t} = \frac{V_0}{R + i\omega L + 1/i\omega C} e^{i\omega t}$$

dvs med amplitude

$$I_0 = \frac{V_0}{R + i\omega L + 1/i\omega C}$$

Dette komplekse tallet kan skrives som

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\, e^{-i\alpha}$$

der

$$\tan\alpha = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Den *fysiske*, reelle strømstyrken blir realdelen av den beregnede komplekse $I(t)$:

$$I_{\text{fysisk}}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t - \alpha)$$

Impedansen Z kan nå oppfattes som en kompleks størrelse,

$$Z \equiv \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{|I_0|}\, e^{i\alpha}$$

med absoluttverdi $|Z| = V_0/|I_0|$ og fasevinkel α.
Tilbake til ladningen på kondensatoren: Det komplekse uttrykket for amplituden q_0 kan skrives slik:

$$q_0 = \frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}\, e^{-i\pi/2 - i\alpha}$$

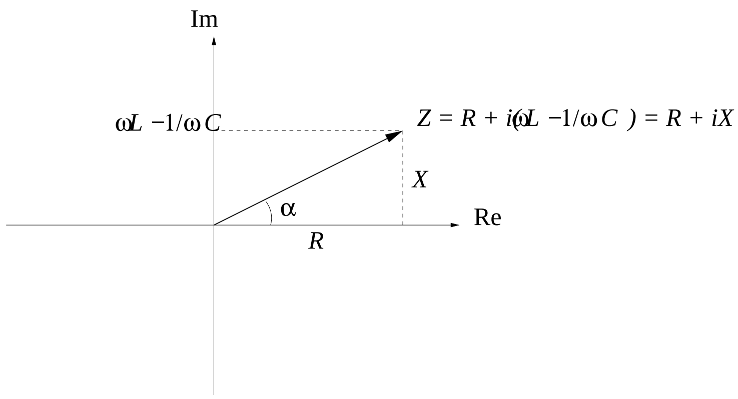
Den fysiske ladningen er realdelen av $q(t)$:

$$q_{\text{fysisk}}(t) = \frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t - \pi/2 - \alpha)$$

som er det samme som vi fant med reell regning, siden

$$\cos(\omega t - \pi/2 - \alpha) = \sin(\omega t - \alpha)$$

Illustrasjon av impedansen i det komplekse planet:



c) Vi har $x(t) = A\exp(-\delta t)\sin(\omega t - \alpha)$ og $E(t) = kx_{\max}^2/2 = kA^2\exp(-2\delta t)$. Dermed blir relativt energitap pr periode for underdempede svingninger:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta E}{E} &= \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)} = 1 - \frac{E(t+T)}{E(t)} \\
&= 1 - e^{-2\delta T} \simeq 1 - (1 - 2\delta T) \\
&= 2\delta T = \frac{4\pi\delta}{\omega} \\
&\simeq \frac{4\pi\delta}{\omega_0} = \frac{2\pi b}{\sqrt{mk}}
\end{aligned}$$

Her er $\delta = b/2m$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \simeq \omega_0^2$ for svak demping, og $\omega_0^2 = k/m$. Godhetsfaktoren er

$$Q = \omega_0/\Delta\omega = \sqrt{k/m}/2\delta = \sqrt{k/m}/(b/m) = \sqrt{mk}/b = 2\pi E/\Delta E$$

d) La oss velge utsvinget $x(t)$ slik som vi valgte ladningen q i oppgave b:

$$x(t) = A\sin(\omega t - \alpha)$$

Massens hastighet er da

$$\dot{x}(t) = \omega A\cos(\omega t - \alpha)$$

Midlere tilført effekt blir

$$\begin{aligned}
\langle P\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T F_0\cos\omega t\,\dot{x}(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T F_0\omega A\left(\cos^2\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\omega t\sin\alpha\right) \\
&= \omega A F_0\left(\cos\alpha\langle\cos^2\omega t\rangle - \sin\alpha\langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\omega A F_0\cos\alpha
\end{aligned}$$

Midlere tapt effekt pga demping blir

$$\begin{aligned}
\langle P_d\rangle &= \langle F_d\dot{x}\rangle \\
&= \langle b\dot{x}^2\rangle \\
&= b\omega^2 A^2\langle\cos^2(\omega t - \alpha)\rangle \\
&= \frac{1}{2}b\omega^2 A^2
\end{aligned}$$

Disse to uttrykkene er identiske ettersom $F_0\cos\alpha = b\omega A$, noe vi innser på følgende vis (f.eks):

$$\begin{aligned}
A &= \frac{F_0/\omega}{\sqrt{b^2 + X^2}} \\
\Rightarrow \omega A b &= \frac{F_0}{\sqrt{b^2 + X^2}}\cdot b = F_0\cos\alpha
\end{aligned}$$