FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2010.

Løsningsforslag til øving 3

Oppgave 1

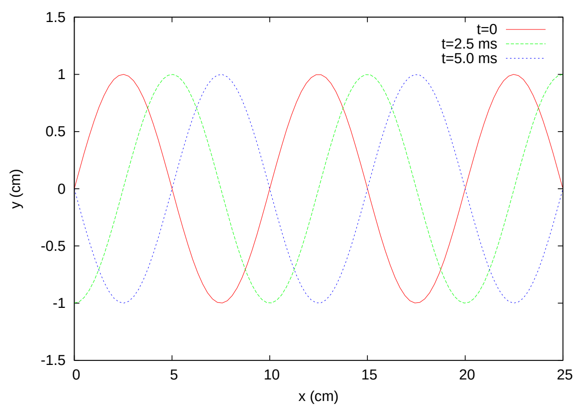
a)

$$y = A\sin(kx - \omega t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{1}$$

med $A = 1.0$ cm, $T = 10$ ms og $\lambda = 10$ cm. Med følgende linjer i gnuplot, der bølgetallet angis med enhet cm^{-1} og vinkelfrekvensen med enhet ms^{-1},

```
gnuplot> pi=3.141592654
gnuplot> k=2*pi/10
gnuplot> omega=0.2*pi
gnuplot> y0(x)=sin(k*x)
gnuplot> y25(x)=sin(k*x-omega*2.5)
gnuplot> y50(x)=sin(k*x-omega*5.0)
gnuplot> set xrange [0:25]
gnuplot> set yrange [-1.5:1.5]
gnuplot> set xlabel 'x (cm)'
gnuplot> set ylabel 'y (cm)'
gnuplot> plot y0(x) title 't=0',y25(x) title 't=2.5 ms',y50(x) title 't=5.0 ms'
```

får vi denne figuren:



Utsvinget vil bli det samme som for $t = 0$ for hver hele periode, dvs for $t = nT = 10n$ ms, der $n = 1, 2, 3, \ldots$.

b) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt *a* slått fast at $T = 10$ ms.

c) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt *a* slått fast at $\lambda = 10$ cm.

d) En bølgetopp forplanter seg en bølgelengde $\lambda = 10$ cm på en periode $T = 10$ ms. Altså er fasehastigheten

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.10\,\text{m}}{0.010\,\text{s}} = 10\,\text{m/s}$$

Hastigheten til strengelementene (i y-retning) er gitt ved:

$$v_p = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin(kx-\omega t)\right) = -\omega A\cos(kx-\omega t). \tag{2}$$

Maksimalverdien av $\cos(kx-\omega t)$ er 1. Altså er maksimalhastighet for et strengelement:

$$v_p^{\max} = \omega A = 200\pi\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 0.010\,\mathrm{m} = 2\pi\,\mathrm{m/s} \approx 6.3\,\mathrm{m/s}$$

e)

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\sin(kx-\omega t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\omega A\cos(kx-\omega t)\right) = -\omega^2 A\sin(kx-\omega t) \tag{3}$$

som har maksimalverdi

$$a^{\max} = \omega^2 A = \left(200\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2\cdot 0.010\,\mathrm{m} = 3.9\cdot 10^3\,\mathrm{m/s}^2.$$

f) Vi har

$$\sin u = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Derfor, dersom vi velger $\phi = -\pi/2$, vil $y = A\cos(kx-\omega t+\phi)$ beskrive samme bølge som $y = A\sin(kx-\omega t)$.

Merknad: Fra (1), (2) og (3) har vi

$$\begin{aligned}
y &= A\sin(kx-\omega t)\\
v_p &= -\omega A\cos(kx-\omega t) = -\omega A\sin\left(kx-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \omega A\sin\left(kx-\omega t-\frac{\pi}{2}\right) = \omega A\sin\left[kx-\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
a &= -\omega^2 A\sin(kx-\omega t) = \omega^2 A\sin(kx-\omega t-\pi) = \omega^2 A\sin[kx-(\omega t+\pi)].
\end{aligned}$$

Med andre ord så sier vi at a i tid er faseforskjøvet $\pi/2$ foran v_p som igjen er faseforskjøvet $\pi/2$ foran y.

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}
y_3 &= y_1 + y_2\\
&= A\cos(kx-\omega t+\phi_1) + A\cos(kx-\omega t+\phi_2)\\
&= 2A\cos\frac{kx-\omega t+\phi_1+kx-\omega t+\phi_2}{2}\cdot\cos\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\\
&= 2A\cos\left(kx-\omega t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\cos\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\\
&= A_3\cos(kx-\omega t+\phi_3) \qquad (4)
\end{aligned}$$

der vi har satt

$$\begin{aligned} A_3 &\equiv 2A\cos\frac{\phi_1-\phi_2}{2} \equiv 2A\cos\frac{\Delta\phi}{2} && (5) \\ \phi_3 &= \frac{\phi_1+\phi_2}{2} && (6) \end{aligned}$$

b) $|A_3|$ har maksimalverdi når

$$\left|\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right| = 1,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = n\cdot\pi, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs når $\Delta\phi = n\cdot 2\pi, n = 0, 1, 2, \ldots$.
Da får vi $|A_3|^{\max} = 2A$ (Bølgene adderes i fase.)

$|A_3|$ har minimalverdi nr

$$\cos\frac{\Delta\phi}{2} = 0,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = (2n+1)\cdot\pi/2, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs når $\Delta\phi = (2n+1)\cdot\pi, n = 0, 1, 2, \ldots$.
Da får vi $|A_3|^{\min} = 0$ (Bølgene adderes i motfase.)

Oppgave 3

a) Vi har:

$$\frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial t^2}. \tag{7}$$

og

$$\frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial t^2}. \tag{8}$$

(7) + (8) gir (siden partiell derivasjon er en lineær operasjon):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2[D_1(x,t)+D_2(x,t)]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D_2(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2[D_1(x,t)+D_2(x,t)]}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} && (9) \end{aligned}$$

b) Vi betrakter først $f(x-vt)$ og setter $X = x - vt$. Vi får da:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial X}\underbrace{\frac{\partial X}{\partial t}}_{=-v} = -v\frac{\partial f}{\partial X} \tag{10}$$

og videre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -v\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\underbrace{\frac{\partial X}{\partial t}}_{=-v} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \tag{11}$$

eller

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \tag{12}$$

Helt tilsvarende (da $\partial X/\partial x = 1$) får vi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \tag{13}$$

(12) og (13) gir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{14}$$

som viser at $f(x-vt)$ oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten.

På helt tilsvarende vis (bortsett fra at vi ikke får minustegn foran v som i (10) og (11)) får vi:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \tag{15}$$

Punkt a og lign. (14) og (15) gir da at:

$$D(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten.

Oppgave 4

a) Bølgehastigheten for transversale bølger på en streng er utledet i forelesningene. Vi får

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{8.5}{0.028}} \simeq 17\text{m/s}$$

Vi har ikke dispersjon i dette systemet, så v er den samme for alle bølger, uansett frekvens.

b)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

som gir bølgelengden

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \simeq 17\text{m}$$

Ettersom λ er omvendt proporsjonal med ν, vil en frekvens på 3.0 Hz resultere i en bølgelengde på ca 5.8 m.

c) Vi har harmoniske bølger som kan beskrives ved

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

der $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet og ϕ en fasekonstant. Vi velger $x = 0$ ved svingekilden og har

$$y(0,t) = A\cos(-\omega t + \phi) = A\cos\omega t$$

som gir $\phi = 0$ siden $\cos u = cos(-u)$. Dermed er bølgen beskrevet ved

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

For $x = 1.0$ og $x = 5.0$ m får vi

$$y(1.0, t) \simeq A \cos\left(2\pi \frac{1.0}{17} - 2\pi t\right)$$

$$y(5.0, t) \simeq A \cos\left(2\pi \frac{5.0}{17} - 2\pi t\right)$$

med t målt i sekunder. Faseforskjellen mellom utsvinget i disse to posisjonene er

$$\Delta\phi = \frac{8\pi}{17} \simeq 1.4 \simeq 83^\circ$$