FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2010.

Løsningsforslag til øving 6

Oppgave 1

a) Litt repetisjon: Generelt er hastigheten til mekaniske bølger gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{\text{mediets elastiske modul}}{\text{mediets massetetthet}}}$$

Lydhastigheten i en gass er dermed i utgangspunktet gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

der B er gassens bulkmodul [N/m^2] og ρ er gassens massetetthet [kg/m^3]. I forelesningene viste vi at for en ideell gass under adiabatiske forhold (ingen utveksling av varme - *det* foregår typisk veldig langsomt i forhold til hvor fort lyden forplanter seg) kan bulkmodulen uttrykkes ved hjelp av trykket p og den såkalte *adiabatkonstanten* $\gamma \equiv C_p/C_V$:

$$B = \gamma p$$

Her er $C_p = (dQ/dT)_p$ gassens varmekapasitet (evt. spesifikk varme) når trykket p holdes konstant, mens $C_V = (dQ/dT)_V$ tilsvarende er varmekapasiteten når volumet V holdes konstant. Symbolet Q angir varme, mens T er temperaturen. For gasser med en-atomige molekyler er $\gamma = 5/3$, og for gasser med to-atomige molekyler er $\gamma = 7/5$. Dermed blir lydhastigheten

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

For ideell gass har vi sammenhengen

$$pV = Nk_BT$$

mellom gassens trykk p, volum V, temperatur T og antall molekyler N. ($k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant) Massetettheten kan skrives $\rho = m \cdot N/V$, der m er molekylmassen. Dermed kan lydhastigheten også uttrykkes ved

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

Vi har her $T = 303$ K og molekylmasse

$$m = 40 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \simeq 6.68 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Dermed blir lydhastigheten

$$v = \sqrt{\frac{5 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 303}{3 \cdot 6.68 \cdot 10^{-26}}} \simeq 323 \text{ m/s}$$

Dette er ikke langt unna den målte verdien 324.37 m/s, så det tyder på at antagelsene om ideell gass og adiabatiske forhold er gode.

b) Dersom trykket i gassen økes fra 1 til 2 atm uten at temperaturen endres, vil eksperimentet gi uendret lydhastighet, ettersom $v = \sqrt{\gamma k_B T/m}$, dvs egentlig bare avhengig av temperaturen. Dersom trykket i gassen økes fra p_1 til $p_2 = 2p_1$ uten at varme utveksles med omgivelsene (dvs adiabatisk), vil både temperaturen T og massetettheten ρ øke. Vi kan starte med å finne det nye volumet V_2 (dvs: det volumet som ved trykk $p_2 = 2$ atm okkuperes av like mange molekyler N som ved $p_1 = 1$ atm okkuperte et volum V_1). Vi bruker antagelsen om adiabatiske forhold, $pV^\gamma =$ konstant:

$$\begin{aligned}
p_1 V_1^\gamma &= p_2 V_2^\gamma \\
p_1 V_1^\gamma &= 2p_1 V_2^\gamma \\
V_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma} V_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/5} V_1 \simeq 0.66 V_1
\end{aligned}$$

Ny temperatur T_2 blir dermed

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{p_2 V_2}{N k_B} \\
&= \frac{2p_1 \cdot 0.66 V_1}{N k_B} \\
&= 1.32 \frac{p_1 V_1}{N k_B} \\
&= 1.32 T_1
\end{aligned}$$

Molekylmassen har ikke endret seg, så den nye lydhastigheten blir

$$\begin{aligned}
v_2 &= \sqrt{\frac{\gamma k_B T_2}{m}} \\
&= \sqrt{1.32} v_1 \\
&= 372.60 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) I forelesningene har vi utledet sammenhengene mellom amplituden A til innkommende bølge og amplitudene B og C til henholdsvis reflektert og transmittert bølge:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} A \\
C &= \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} A
\end{aligned}$$

Her er $\mu_2 = 90$ g/m masse pr lengdeenhet på den tunge delen av strengen, $\mu_1 = 10$ g/m er masse pr lengdeenhet på den lette delen av strengen og $A = 5$ mm. Innsetting av disse tallverdiene gir $B = 2A/4 = 2.5$ mm og $C = 2A/4 = 2.5$ mm.

b) Fra forelesningene har vi følgende uttrykk for midlere effekt transportert med den innkommende bølgen (også oppgitt i oppgaveteksten):

$$\begin{aligned}
\overline{P}_i &= \frac{1}{2}v\mu_1\omega^2A^2 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{S/\mu_1}\mu_1\omega^2A^2 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{S\mu_1}\omega^2A^2 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 10\cdot 10^{-3}}\cdot(10\pi)^2\cdot(5\cdot 10^{-3})^2 \\
&= 2.5\ \mathrm{mJ/s}
\end{aligned}$$

Andel av effekten som reflekteres er gitt ved refleksjonskoeffisienten $R = \overline{P}_r/\overline{P}_i$:

$$R = \left(\frac{\sqrt{\mu_2}-\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}+\sqrt{\mu_1}}\right)^2 = 0.25 = 25\%$$

Resten blir transmittert:

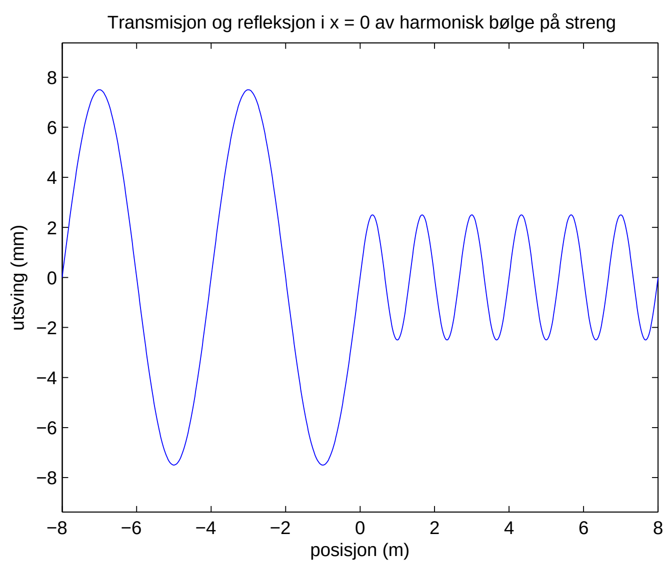
$$T = 1 - R = 0.75 = 75\%$$

c) Utsvinget til venstre for skjøten i $x = 0$ er:

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= y_i(x,t) + y_r(x,t) \\
&= A\left(\sin(kx-\omega t) + \frac{1}{2}\sin(kx+\omega t)\right) \\
&= A\left(\sin kx\cos\omega t - \cos kx\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin kx\cos\omega t + \frac{1}{2}\cos kx\sin\omega t\right) \\
&= A\left(\frac{3}{2}\sin kx\cos\omega t - \frac{1}{2}\cos kx\sin\omega t\right)
\end{aligned}$$

som er en sum av to stående bølger.

d) Her er en figur av sluttbildet av animasjonen:



e) Uansett skjøtens posisjon kan vi for det første velge $\phi_i = 0$ (for eksempel). Fysikken kan ikke avhenge av hvor vi legger skjøten. Med andre ord: Dersom vi hadde en bestemt sammenheng mellom fasene til y_i og y_r med skjøten i $x = 0$, må vi fortsatt ha den samme bestemte sammenhengen med skjøten i $x = a$. Det oppnår vi ved å velge $\phi_r = -2ka$. Da blir nemlig

$$y_i(a,t) = A\sin(ka - \omega t) = -A\sin(\omega t - ka)$$

og

$$y_r(a,t) = B\sin(ka + \omega t - 2ka) = B\sin(\omega t - ka)$$

dvs

$$y_r(a,t) = -\frac{B}{A}\,y_i(a,t)$$

den samme sammenhengen mellom y_r og y_i som vi hadde i $x = 0$ med skjøten i $x = 0$, dvs enten y_r og y_i i fase (motsatt fortegn på B og A) eller y_r og y_i i motfase (samme fortegn på B og A) i skjøten. Mer generelt må vi, med skjøten i $x = a$, velge fasekonstanter slik at

$$\phi_r + \phi_i = -2ka$$

Oppgave 3

a) B
Grunntonen på en svingende streng som er festet i begge ender har bølgelengde $\lambda = 2L$, der L er strengens lengde. En bestemt frekvens ν oppnås da ved å sørge for at bølgehastigheten blir

$$v = \lambda\nu = 2\nu L$$

Samtidig vet vi at v er bestemt ved strammingen S og strengens masse pr lengdeenhet μ:

$$v = \sqrt{S/\mu}$$

Strammingen må derfor være

$$\begin{aligned} S &= \mu v^2 \\ &= \frac{m}{L}\cdot 4\nu^2 L^2 \\ &= 4m\nu^2 L \\ &= 4\cdot 0.0002\cdot 440^2\cdot 0.370 \\ &\simeq 57.3 \text{ N} \end{aligned}$$

b) A
Stående lydbølger i et tynt luftfylt rør som er åpent i begge ender, har knutepunkt, $\Delta p = 0$, for trykkbølgen i begge ender, dvs i $x = 0$ og i $x = L$, der $L = 0.5$ m i dette tilfellet. Utsvingsbølgen ξ har dermed maksimal amplitude (buk) i begge ender. Laveste resonansfrekvens (grunntonen) må dermed ha bølgelengde $\lambda = 2L = 1$ m. Med lydhastighet $v = 340$ m/s blir laveste resonansfrekvens

$$\nu = v/\lambda = 340 \text{ Hz}$$

c) C
Rørets resonansfrekvenser er $\nu_n = n \cdot 340$ Hz, med $n = 1, 2, ...$ Resonans nr n har n knutepunkter for den stående utsvingsbølgen ξ. Altså 4 knutepunkter for moden med frekvens 1360 Hz.

d) D
Vi kan tenke på dette systemet som tvungne svingninger: Den vibrerende gitarstrengen virker som en ekstern harmonisk kraft på luftmolekylene omkring, som dermed tvinges til å svinge fram og tilbake med samme frekvens som den vibrerende strengen. Bølgehastigheten er bestemt ved mediets elastiske egenskaper og mediets massetetthet og er generelt forskjellig for strengen og lufta. Dermed blir også bølgelengden $\lambda = v/\nu$ generelt forskjellig. Når det gjelder amplituden, vil det nok være en sammenheng mellom disse, for et kraftigere anslag på strengen resulterer jo i sterkere lyd. Men som vi har sett i en tidligere øving, vil utsvingsamplituden til luftmolekylene typisk være av størrelsesorden noen få nanometer (med lydintensitet godt under smertegrensen), som åpenbart er mye mindre enn typiske amplituder på en vibrerende gitarstreng.

Oppgave 4

At vandretiden τ kun avhenger av strengens omløpsperiode T, og ikke av lengden L eller massen M, kan vi slå fast med ren dimensjonsanalyse: Problemet inneholder kun størrelsene T, M og L. Det går ikke an å lage størrelser med enhet s (sekund) ved å kombinere kg og m. Da gjenstår bare T.
Bølgehastigheten er $v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{SL/M}$. Snordraget $S(r)$ i avstand r fra festepunktet er den kraften som skal til for å holde strengbiten mellom r og L i sirkulær bane med vinkelfrekvens $\omega = 2\pi/T$, dvs akselerasjon $a(r') = \omega^2 r'$:

$$\begin{aligned} S(r) &= \int a\, dm = \int_r^L \omega^2 r' \, \frac{M}{L} dr' \\ &= \frac{\omega^2 M}{2L} \left(L^2 - r^2 \right) \end{aligned}$$

Med $S(r)$ på plass skulle resten være grei skuring! Bølgehastigheten blir

$$v(r) = \sqrt{S(r)L/M} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{L^2 - r^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{T} \sqrt{L^2 - r^2}$$

Tiden som en bølgepuls bruker fra festepunktet til strengens ende blir dermed

$$\begin{aligned} \tau &= \int \frac{dr'}{v} \\ &= \frac{T}{\sqrt{2}\pi} \int_0^L \frac{dr'}{\sqrt{L^2 - r'^2}} \\ &= \frac{T}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Nedenfor er et forsøk på en noe mer utdypende forklaring:

Vi betrakter en liten bit av strengen, mellom r og $r+dr$, og med masse $dm = dr \cdot M/L$. På denne lille biten virker det en kraft *innover mot sentrum* på grenseflaten ved r (fra masseelementet rett innenfor) og en kraft *utover* på grenseflaten ved $r + dr$ (fra masseelementet rett utenfor). Disse to kreftene må nettopp være snordraget $S(r)$ og $S(r + dr)$, slik at nettokraften, innover, på vårt lille masseelement må være:

$$dF = S(r) - S(r + dr).$$

Ifølge Newtons 2. lov har vi

$$dF = dm \cdot a = \frac{M}{L} dr\omega^2 r.$$

Den totale kraften på strengbiten som befinner seg mellom r og L blir da

$$F(r) = \int dF = \frac{M\omega^2}{L} \int_r^L r\,dr = \frac{M\omega^2}{2L} \left(L^2 - r^2\right).$$

Men denne kraften $F(r)$ må nettopp tilsvare snordraget i avstand r, dvs $F(r) = S(r)$. Dvs, snordraget i r er lik nettokraften på strengen mellom r og L. (Del f.eks. opp biten mellom r og L i små biter med lengde dr. I hver grenseflate mellom slike små biter virker biten til venstre på den til høyre med en like stor men motsatt rettet kraft som omvendt, Newtons 3. lov, slik at kraften i den venstre enden, $S(r)$, er lik total kraft på hele strengen utenfor r.)
Med $S(r)$ på plass henvises til avslutningen på den offisielle versjonen.