FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2010.

Løsningsforslag til øving 8

Oppgave 1

Helt generelt vil vi ha, for en elektromagnetisk bølge som forplanter seg i retning $\hat{k}$ og som er polarisert i retning $\hat{n}$ (med $\hat{n} \perp \hat{k}$):

$$\boldsymbol{E} = \hat{n} E_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

Alternativt kunne vi selvsagt ha brukt sinus i stedet for cosinus. Ettersom $c = \omega/k$, der $k = |\boldsymbol{k}|$ (slik at $\boldsymbol{k} = k\hat{k}$), kan vi også skrive

$$\boldsymbol{E} = \hat{n} E_0 \cos[\omega(t - \hat{k} \cdot \boldsymbol{r}/c)]$$

I kartesiske koordinater er $\boldsymbol{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ kan deretter bestemmes ved hjelp av relasjonen som vi utledet fra Faraday-Henrys lov, nemlig

$$\omega \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$$

eller

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega} \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \boldsymbol{E}$$

a) Forplantning i negativ z-retning betyr at $\hat{k} = -\hat{z}$. Polarisering i y-retning betyr at $\hat{n} = \hat{y}$. Dermed:

$$\boldsymbol{E} = \hat{y} E_0 \cos[\omega(t + z/c)]$$

Det tilhørende magnetfeltet er

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \frac{1}{c} \hat{k} \times \boldsymbol{E} \\ &= \frac{1}{c}(-\hat{z}) \times \hat{y} E_0 \cos[\omega(t + z/c)] \\ &= \hat{x} \frac{E_0}{c} \cos[\omega(t + z/c)] \end{aligned}$$

Kartesiske komponenter av $\boldsymbol{k}$ og $\hat{n}$:

$$\begin{aligned} k_x = k_y = 0 \quad &, \quad k_z = -\frac{\omega}{c} \\ n_x = n_z = 0 \quad &, \quad n_y = 1 \end{aligned}$$

b) Forplantning i retning $(1, 1, 1)$ betyr at vi kan skrive

$$\boldsymbol{k} = a(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Samtidig har vi $k = \omega/c$ slik at

$$\frac{\omega}{c} = a\sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}a$$

dvs $a = \omega/\sqrt{3}c$. Dermed:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{\sqrt{3}c}\,(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

og

$$\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Polarisering normalt på z-aksen betyr at vi kan skrive

$$\hat{n} = n_x\hat{x} + n_y\hat{y}$$

Gauss' lov brukte vi til å vise at $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$, som her betyr at $\hat{k} \cdot \hat{n} = 0$, og som gir

$$(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \cdot (n_x\hat{x} + n_y\hat{y}) = n_x + n_y = 0$$

dvs $n_y = -n_x$. Ettersom $|\hat{n}| = 1$, finner vi $n_x = 1/\sqrt{2}$ og $n_y = -1/\sqrt{2}$ (eller omvendt, hvis du foretrekker det). Alt i alt:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c}\right)\right]$$

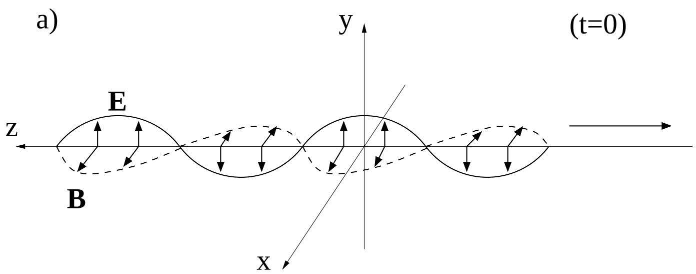
Det tilhørende magnetfeltet blir

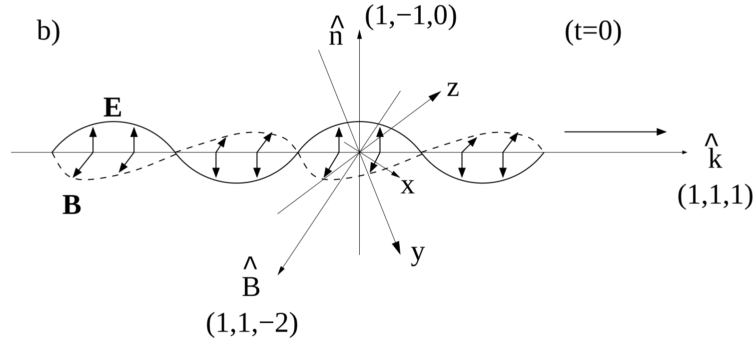
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\hat{k} \times \boldsymbol{E} \\
&= \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{3}}\,(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c}\right)\right] \\
&= \frac{E_0}{\sqrt{6}c}(\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}) \cos\left[\omega\left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c}\right)\right]
\end{aligned}$$

Kartesiske komponenter av $\boldsymbol{k}$ og $\hat{n}$:

$$\begin{aligned}
k_x &= k_y = k_z = \frac{\omega}{\sqrt{3}c} \\
n_x &= -n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\;,\; n_z = 0
\end{aligned}$$

Figur (selv om det ikke ble bedt om dette i oppgaveteksten):





Oppgave 2
Hvis flaten absorberer all strålingen fullstendig, overføres all strålingens impuls til flaten. Dermed:

$$P_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = \frac{1300}{3 \cdot 10^8} = \frac{1.3}{3} \cdot 10^{-5}\ \text{N/m}^2$$

Hvis flaten reflekterer all strålingen fullstendig, blir impulsoverføringen dobbelt så stor. Dermed:

$$P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} = \frac{2 \cdot 1300}{3 \cdot 10^8} = \frac{2.6}{3} \cdot 10^{-5}\ \text{N/m}^2$$

Det atmosfæriske trykket er $P_{\text{atm}} = 10^5\ \text{N/m}^2$. Det betyr at strålingstrykket fra sola er forsvinnende lite i forhold:

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{atm}}} \sim 10^{-10}$$

Oppgave 3
Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{16\pi^2 c r^2}\ \cos^2[\omega(t - r/c)]\ \hat{\theta} \times \hat{\phi}$$

Med hensyn til retninger, kan vi tenke oss at vi befinner oss i en posisjon på et kuleskall med radius r, slik at z-aksen går gjennom sentrum av kula, fra sørpol til nordpol. Dermed peker

$\hat{\theta}$ sørover og $\hat{\phi}$ østover, slik at kryssproduktet mellom disse to blir en enhetsvektor som peker radielt utover, dvs $\hat{r}$. Altså:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{16\pi^2 c r^2} \cos^2[\omega(t - r/c)]\, \hat{r}$$

Strålingsintensiteten får vi ved å ta et tidsmiddel over en periode av tallverdien av Poyntings vektor. Her er det bare faktoren $\cos^2[\omega(t-r/c)]$ som avhenger av tiden, og ettersom $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, samt at middelverdien av $\cos^2 x$ og $\sin^2 x$ over en periode må være like store, har vi umiddelbart at $\langle\cos^2 x\rangle = \langle\sin^2 x\rangle = 1/2$. Følgelig:

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 c r^2}\, \hat{r}$$

Total utstrålt energi pr tidsenhet finner vi ved å legge sammen bidragene utsendt gjennom alle biter $d\boldsymbol{A}$ av ei hel kuleflate med radius r. Dvs:

$$\langle P\rangle = \oint \langle\boldsymbol{S}\rangle \cdot d\boldsymbol{A}$$

Her er

$$d\boldsymbol{A} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi\, \hat{r}$$

se Rottmann eller elmagkurset fra i vår. Dermed:

$$\langle P\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta$$

Integralet over ϕ gir rett og slett en faktor 2π. Integralet over θ kan vi sikkert finne i Rottmann. Alternativt kan vi skrive om:

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]^3 \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2i}\left[e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\sin 3\theta - 3\sin\theta\right]
\end{aligned}$$

Og nå klarer vi å integrere:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta &= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \left[\sin 3\theta - 3\sin\theta\right]\, d\theta \\
&= -\frac{1}{4}\Big|_0^{\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta + 3\cos\theta\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 3 - 3\right] \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Total utstrålt effekt blir dermed

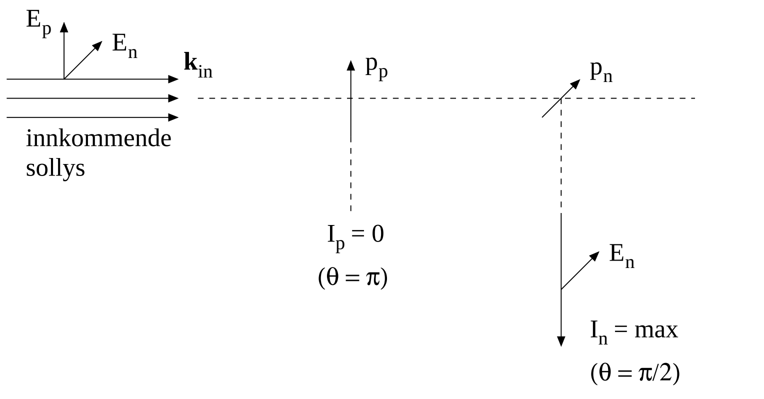
$$\langle P\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

som vi skulle vise.

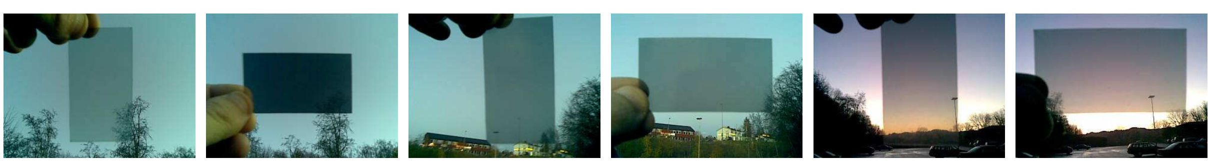
Oppgave 4

- Anta at vi ser i en retning omtrent normalt på forplantningsretningen til det innkommende sollyset. Ved å dreie polarisasjonsfilteret ser man at lyset som kommer fra den blå himmelen er polarisert i forholdsvis stor grad. Polarisasjonsretningen er normalt på både synslinjen og på forplantningsretningen til det innkommende sollyset.

  Forklaring: Det innkommende sollyset er ikke polarisert men består av bølger med elektrisk feltvektor $\boldsymbol{E}$ i alle mulige retninger, dog normalt på forplantningsretningen, siden elektromagnetiske bølger alltid er transversale. En bølge med en gitt polarisasjonsretning kan dekomponeres i en komponent parallelt med synslinjen (E_p) og en komponent normalt på synslinjen (E_n):



  Komponenten E_p vil indusere oscillerende dipoler p_p i atmosfæren. Disse sender igjen ut elektromagnetisk stråling med retningsavhengig intensitet $I(\theta) \sim \sin^2\theta$, der $\theta = \pi$, og dermed $I = 0$, tilsvarer nedover mot bakken. Komponenten E_n vil indusere oscillerende dipoler p_n. Utsendt stråling fra disse dipolene blir maksimal i planet normalt på dipolen ($\theta = \pi/2$), dvs inklusive retningen nedover mot bakken.



  De to bildene lengst til venstre er tatt sørover, dvs mer eller mindre normalt på sollysets forplantningsretning. De to bildene i midten er tatt østover, dvs mer eller mindre i samme retning som sollysets forplantningsretning. De to bildene lengst til høyre er tatt vestover, dvs mot solnedgangen.

  Vi ser tydelig at lyset fra sørhimmelen er polarisert, med $\boldsymbol{E}$ vertikalt, dvs normalt på synslinjen (og, selvsagt, normalt på sollysets forplantningsretning). Dette stemmer bra med diskusjonen ovenfor: Synslinjen tilsvarer en retning som samsvarer med $\theta = \pi/2$ for elektriske dipoler som oscillerer vertikalt, og som sender bølger mot oss med $\boldsymbol{E}$ pekende vertikalt. For oscillerende dipoler på østhimmelen vil synslinjen tilsvare $\theta \simeq \pi/2$ uansett polarisasjonsretning. Dette lyset er derfor ikke polarisert. Tilsvarende vil også gjelde på himmelen mot vest.

- På min Dell PC-skjerm er lyset polarisert diagonalt, på skrå oppover mot venstre. På en Samsung skjerm jeg har stående, er lyset polarisert vertikalt. Begge disse skjermene er såkalte LCD-skjermer (liquid crystal display), der det grunnleggende prinsippet nettopp baserer seg på å manipulere polarisert lys. Eldre CRT-skjermer (cathode ray tube) gir ikke polarisert lys. Så vidt jeg vet gjelder dette heller ikke såkalte plasma-skjermer.

  Anta nå at vi holder et polarisasjonsfilter foran en LCD-skjerm slik at minimalt med lys slipper gjennom. Holder vi nå et annet polarisasjonsfilter bak det første, vil vi observere at minimalt med lys slipper gjennom de to hvis de enten holdes med samme orientering, eller normalt på hverandre. Holdes filter nummer to på skrå i forhold til det første, ser vi at lys slipper gjennom.

  Forklaring: Filteret nærmest skjermen holdes slik at filterets polarisasjonsretning danner en vinkel θ med polarisasjonsretningen til lyset fra skjermen. Lyset fra skjermen, eller rettere sagt det tilhørende elektriske feltet, kan nå dekomponeres, i en komponent parallelt med filterets polarisasjonsretning, E_p, og en komponent normalt på filterets polarisasjonsretning, E_n. Hvis amplituden til feltvektoren i lyset fra skjermen er E_0, har vi nå amplituder $E_0 \cos\theta$ for $\boldsymbol{E}_p$ og $E_0 \sin\theta$ for $\boldsymbol{E}_n$. Med andre ord, lyset som slipper gjennom filteret nærmest skjermen har amplitude $E_0 \cos\theta$ og retning på det elektriske feltet langs dette filterets polarisasjonsretning. Denne elektromagnetiske bølgen faller deretter inn mot filteret nærmest deg, med en retning på det elektriske feltet $\boldsymbol{E}_p$ som danner en vinkel $\pi/2 - \theta$ med dette filterets akse. Vi kan nå gjøre en tilsvarende dekomponering av $\boldsymbol{E}_p$, hhv parallelt med og normalt på aksen til filteret nærmest deg. Resultatet blir at amplituden på lyset som slipper gjennom begge filtre er

  $$E_0 \cos\theta \cdot \cos(\pi/2 - \theta) = E_0 \cos\theta \cdot \sin\theta$$

- Med tre filtre mellom deg og en upolarisert lyskilde, og med filtrenes orientering som forklart i oppgaveteksten, blir situasjonen akkurat den samme som i forrige kulepunkt, i og med at filteret nærmest lyskilden slipper gjennom lys som er polarisert i en bestemt retning, akkurat som LCD-skjermen. Amplituden til lyset som du ser gjennom de tre filtrene vil derfor avhenge av det midterste filterets orientering som

  $$E(\theta) \sim \cos\theta \cdot \sin\theta$$

  Denne amplituden er maksimal når $\theta = 45$ grader. Det er lett å vise ved å derivere E mhp θ og sette lik null.

Løsning, trening med div og curl

$a)$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \boldsymbol{a}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \\
= & \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{a}\cos(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t) \\
= & -(\hat{x}k_x+\hat{y}k_y+\hat{z}k_z)\cdot\boldsymbol{a}\sin(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t) \\
= & -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \boldsymbol{a}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \\
= & \hat{x}\frac{\partial}{\partial y}a_z\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)-\hat{x}\frac{\partial}{\partial z}a_y\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \\
& +\hat{y}\frac{\partial}{\partial z}a_x\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)-\hat{y}\frac{\partial}{\partial x}a_z\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \\
& +\hat{z}\frac{\partial}{\partial x}a_y\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)-\hat{z}\frac{\partial}{\partial y}a_x\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \\
= & -\left[\hat{x}(k_y a_z-k_z a_y)+\hat{y}(k_z a_x-k_x a_z)+\hat{z}(k_x a_y-k_y a_x)\right]\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) \\
= & -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)
\end{aligned}$$

$b)$ Vi kan for eksempel se på x-komponenten av vektoridentiteten som vi er bedt om å bevise:

$$\begin{aligned}
\left[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})\right]_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla\times\boldsymbol{a})_z-\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\times\boldsymbol{a})_y \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right) \\
&= \left[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\right]_x-\left[\nabla^2\boldsymbol{a}\right]_x
\end{aligned}$$

Med "smart notasjon":

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{a}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) &= \partial_i a_i\cos(k_j x_j-\omega t) \\
&= -a_i\sin(k_j x_j-\omega t)\partial_i(k_j x_j) \\
&= -a_i\sin(k_j x_j-\omega t)k_j\delta_{ij} \\
&= -k_i a_i\sin(k_j x_j-\omega t) \\
&= -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left[\nabla \times \boldsymbol{a} \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\right]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j a_k \cos(k_l x_l - \omega t) \\
&= \varepsilon_{ijk} (-k_j a_k) \sin(k_l x_l - \omega t) \\
&= -\left[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{a} \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\right]_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{a}\right]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l a_m \\
&= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l a_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l a_m \\
&= \partial_i (\partial_m a_m) - (\partial_j \partial_j) a_i \\
&= \Big[\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a}\Big]_i
\end{aligned}
$$