NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET, INSTITUTT FOR FYSIKK

Utarbeidet av: Jon Andreas Støvneng

LØSNINGSFORSLAG (8 SIDER) TIL EKSAMEN I FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK
Fredag 3. desember 2010 kl. 0900 - 1300

OPPGAVE 1 [telte 16 %]

a

•

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

• Innsetting av den oppgitte formen på $x(t)$ i bevegelsesligningen gir to ligninger (en proporsjonal med $\sin \omega t$ og en proporsjonal med $\cos \omega t$) som grunnlag for å bestemme τ og ω. Vi gjør ikke det her, men setter alternativt en "prøveløsning" $\exp(-zt)$ inn i bevegelsesligningen. Det gir "karakteristisk" ligning

$$mz^2 - bz + k = 0,$$

med løsninger

$$z = \frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2},$$

siden dempingen er oppgitt å være svak. En løsning for $x(t)$ som er konsistent med disse verdiene av z er

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t,$$

med $\underline{\tau = 2m/b}$.

• ... og $\underline{\omega = \sqrt{k/m - (b/2m)^2}}$. Siden oppgaven spesifiserer svak dempning, er det også helt greit å slå fast at $\omega \simeq \sqrt{k/m}$.

b

• Total energi $E(t)$ kan f.eks settes lik potensiell energi $E_p(nT)$ der T er perioden og $n = 0, 1, 2 \ldots$, dvs ved tidspunkter nT som tilsvarer at massen har maksimalt positivt utsving. Der snur massen, slik at kinetisk energi er null, og $E = E_p$. Ved disse tidspunktene er $\cos \omega t = \cos n\omega T = 1$. Videre er

$$E_p(nT) = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2nT/\tau}.$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \frac{E_p(nT) - E_p((n+1)T)}{E_p(nT)} \\ &= 1 - e^{-2T/\tau} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\simeq 1-(1-(-2T/\tau)) \\
&= 2T/\tau \\
&= 2\pi b/\omega m
\end{aligned}
$$

Systemets Q-verdi blir altså

$$Q = 2\pi E/\Delta E = \underline{\omega m/b \simeq \omega_0 m/b = \sqrt{km}/b},$$

der vi helt til slutt brukte opplysningen om meget svak demping.

OPPGAVE 2 [telte 8 %]

• Lydhastigheten i en gitt gass avhenger kun av temperaturen. Hvis temperaturen i utgangspunktet er T_0, har vi (fra formelarket)

$$v_0 = \sqrt{\gamma k_B T_0/m},$$

der γ er adiabatkonstanten, her lik 5/3 (enatomige molekyler), k_B er Boltzmanns konstant, og m er massen til atomene.
For å finne lydhastigheten v_1 etter at gassen har ekspandert adiabatisk slik at trykket er halvert, benytter vi oss av at pV^γ er konstant under adiabatiske prosesser, samt at gassen er ideell, slik at $pV = Nk_BT$. Her er N antall atomer i et volum V av gassen.
Ideell gass innebærer at

$$p_0V_0 = Nk_BT_0 \quad , \quad p_1V_1 = Nk_BT_1,$$

dvs

$$T_1/T_0 = p_1V_1/p_0V_0 = V_1/2V_0,$$

der vi brukte at $p_1 = p_0/2$. Adiabatisk utvidelse betyr at

$$p_0V_0^\gamma = p_1V_1^\gamma,$$

dvs

$$V_1/V_0 = (p_0/p_1)^{1/\gamma} = 2^{1/\gamma}.$$

Vi setter dette inn i uttrykket for temperaturforholdet og får

$$T_1/T_0 = 2^{1/\gamma}/2 = 2^{-2/5}.$$

Dermed:

$$v_1 = \sqrt{\gamma k_B T_1/m} = \sqrt{(\gamma k_B T_0/m)\cdot 2^{-2/5}} = \underline{v_0 \cdot 2^{-1/5} \simeq 0.87\, v_0}.$$

OPPGAVE 3 [telte 8 %]

• Diffraksjon og interferens med N meget smale spalter gir opphav til hovedmaksima med $N-2$ bimaksima mellom to påfølgende hovedmaksima. Her har vi 6 slike bimaksima, så $\underline{N=8}$. Ved 1. ordens hovedmaksimum har vi

$$\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta = \pi,$$

slik at

$$d = \frac{\lambda}{\sin\theta} \simeq \frac{\lambda}{\theta} = \frac{500 \cdot 10^{-9}}{0.005}\,\mathrm{m} = \underline{10^5\,\mathrm{nm} = 0.1\,\mathrm{mm} = 10^{-4}\,\mathrm{m}}.$$

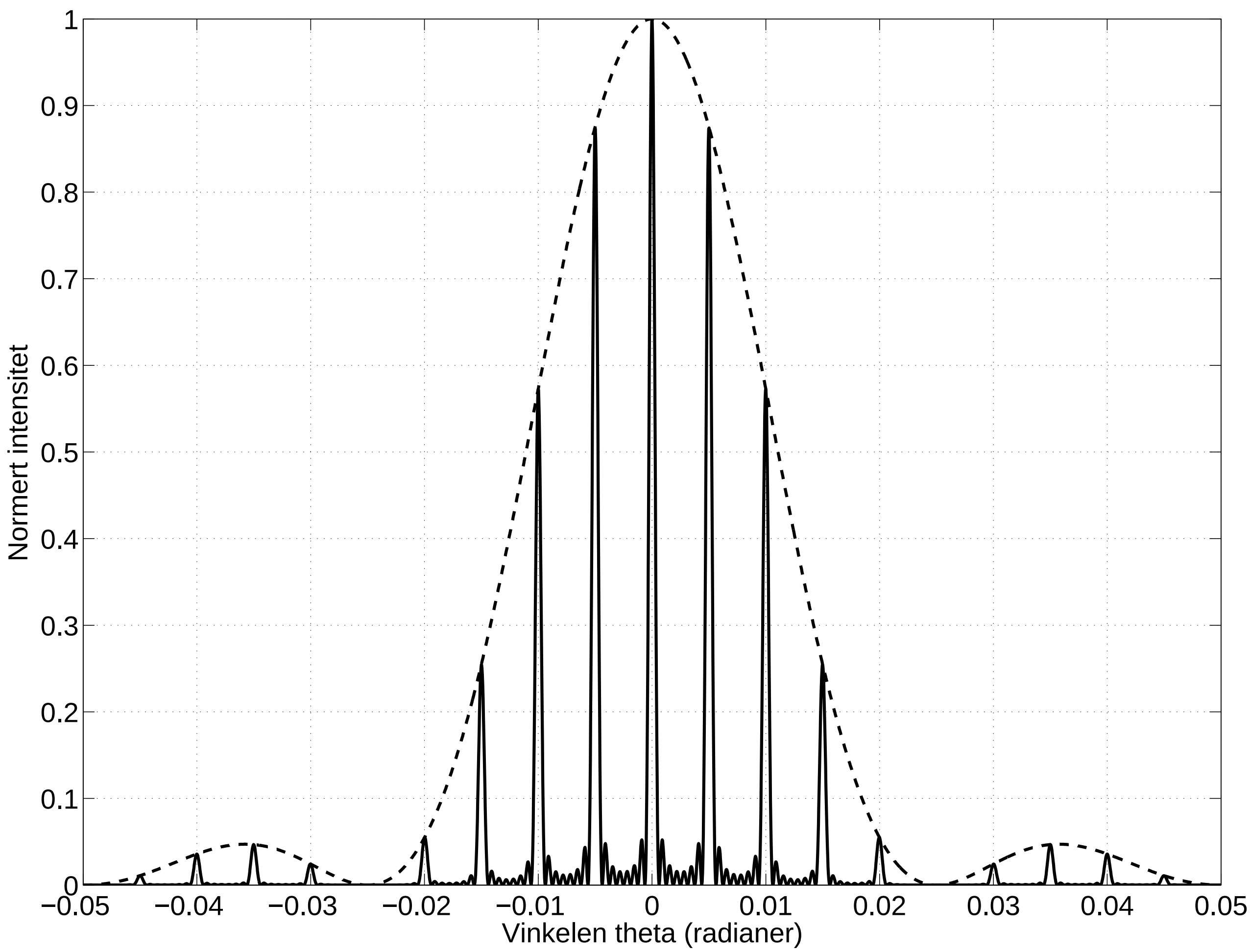
• Spaltebredde $a = d/5 = 0.02$ mm gir n-te nullpunkt i diffraksjonsfaktoren $\sin^2\beta/\beta^2$ ved

$$\beta = \pi a(\sin\theta)/\lambda = \pm n\pi,$$

dvs

$$\theta \simeq \pm n\lambda/a = \pm 5n\lambda/d = \pm 0.025n,$$

der $n = 1, 2 \ldots$. Diffraksjonsfaktoren vil framstå som en omhylningskurve for interferensmønsteret i oppgaveteksten:



OPPGAVE 4 [telte 16%]

a

• Tyngdeleddet gk og overflatespenningsleddet $\gamma k^3/\rho$ er like store når $k = k_0 = \sqrt{g\rho/\gamma}$, dvs

$$\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 2\pi\sqrt{\gamma/g\rho} \simeq \underline{0.017\,\text{m} = 1.7\,\text{cm}}.$$

Vi kan benytte dette resultatet i resten av oppgaven: Dersom bølgelengden er mye større enn λ_0, kan vi neglisjere overflatespenningsleddet i dispersjonsrelasjonen, og vi har såkalte tyngdebølger. Omvendt, dersom bølgelengden er mye mindre enn λ_0, kan vi neglisjere tyngdeleddet i dispersjonsrelasjonen, og vi har såkalte kapillærbølger.

• Med λ i området 0.2 til 2.0 m har vi bare tyngdebølger, så vi kan med god tilnærmelse bruke $\omega(k) = \sqrt{gk}$, slik at gruppehastigheten blir $v_g = d\omega/dk = \sqrt{g/4k} = \sqrt{\lambda g/8\pi}$. Vi ser at gruppehastigheten øker med økende bølgelengde. Den raskeste delen av bølgepakken har derfor hastighet $v_g = \sqrt{2.0 \cdot 9.8/8\pi} \simeq 0.88$ m/s. Tid brukt fra båten inn til land er da $t = 50/0.88 \simeq \underline{57}$ sekunder.

• Den langsomste delen av bølgepakken har $\lambda = 0.2$ m, som gir en økning i tidsbruken med en faktor $\sqrt{10}$ i forhold til de raskeste, med andre ord $t \simeq \underline{179}$ sekunder.

Slik oppgaven var formulert, med fokus på de enkelte fourierkomponenter, kunne det i disse to kulepunktene være naturlig å benytte fasehastigheter $v = 2v_g$. Ansvaret for eventuell forvirring og uklarhet hviler her på faglærer, slik at tidsbruk 28 og 90 s blir også godkjent.

b

• Gruppehastigheten er

$$v_g = \frac{d\omega}{dk},$$

og vi skal bestemme de to mulige bølgelengdene λ_1 og λ_2 som gir $v_g = 1.0$ m/s. Det er oppgitt at λ_1 er "meget kort", noe som burde motivere for å neglisjere tyngdeleddet i dispersjonsrelasjonen. Vi prøver:

$$\begin{aligned} v_g &= \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{k_1} = \sqrt{\frac{9\pi\gamma}{2\rho\lambda_1}} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{9\pi\gamma}{2\rho v_g^2} \simeq \underline{1.0\,\text{mm}}. \end{aligned}$$

Vi ser at λ_1 *ble* mye mindre enn $\lambda_0 = 17$ mm, så tilnærmingen vi brukte fra starten av var i orden.

Det er videre oppgitt at λ_2 er "forholdsvis lang", så vi satser på at vi nå kan neglisjere overflatespenningsleddet i dispersjonsrelasjonen:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k_2}} = \sqrt{\frac{g\lambda_2}{8\pi}} \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \frac{8\pi v_g^2}{g} \simeq \underline{2.6\,\text{m}}. \end{aligned}$$

Vi ser at λ_2 *ble* mye større enn $\lambda_0 = 17$ mm, så tilnærmingen vi brukte her var også i orden.

OPPGAVE 5 [telte 16 %]

<u>**a**</u> • Fra figuren ser vi at

$$\sin\theta_B = \frac{h_B}{r},$$

der θ_B er innfallsvinkelen når $h = h_B$. Vi må derfor finne et uttrykk for $\sin\theta_B$.
Vi ser at $\alpha = \beta$ gir $R_p = 0$, dvs ved denne innfallsvinkelen vil den reflekterte strålen være fullstendig polarisert normalt på innfallsplanet. Vi skal komme tilbake til dette i punkt **b**. Med $\alpha = \beta$ har vi

$$\frac{\cos\phi}{\cos\theta_B} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n.$$

Her har vi satt innfallsvinkelen θ_1 lik θ_B og brytningsvinkelen θ_2 lik ϕ. Vi trenger en ligning til for å fastlegge de to ukjente, ϕ og θ_B, og da er det vel nærliggende å ty til Snells lov:

$$1 \cdot \sin\theta_B = n\sin\phi.$$

Vi er på jakt etter et uttrykk for $\sin\theta_B$, så vi må eliminere ϕ fra de to ligningene. Fra Snells lov har vi

$$\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2\theta_B}.$$

Fra den første ligningen har vi

$$\cos\phi = n\cos\theta_B = n\sqrt{1-\sin^2\theta_B}.$$

Vi setter de to uttrykkene for $\cos\phi$ lik hverandre, kvadrerer og løser med hensyn på $\sin^2\theta_B$:

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{n^2}\sin^2\theta_B &= n^2(1-\sin^2\theta_B) \\
\Rightarrow \left(n^2-\frac{1}{n^2}\right)\sin^2\theta_B &= n^2-1 \\
\Rightarrow \sin^2\theta_B &= \frac{n^2-1}{n^2-1/n^2} = \frac{n^2-1}{(n^4-1)/n^2} = n^2\frac{n^2-1}{(n^2-1)(n^2+1)} = \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+1/n^2}
\end{aligned}$$

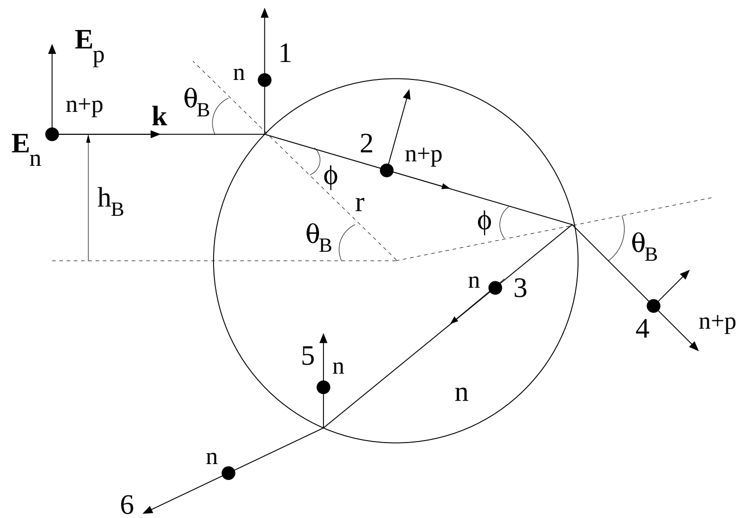
Dette gir

$$h_B = \underline{\frac{r}{\sqrt{1+1/n^2}}}.$$

Vannkule med $n \simeq 1.34$ gir $\theta_B \simeq 53.3°$.

(På denne oppgaven kan en alternativt starte direkte fra $\tan\theta_B = n$, eventuelt andre sammenhenger som en kjenner til for Brewsters vinkel.)

b



• Vi slo ovenfor fast at $R_p = 0$ for den innkommende strålen som treffer kula og "deler seg" i banene 1 og 2. Dermed er det klart at stråle 1 er polarisert normalt på innfallsplanet(n), mens stråle 2 inneholder både n og p. Vi ser nærmere på stråle 2 som reflekteres (3) og transmitteres/refrakteres (4) i grenseflaten mot luft. Med notasjonen i det som er oppgitt i oppgaveteksten, har vi nå en innfallsvinkel $\theta_1 = \phi$, mens brytningsvinkelen er $\theta_2 = \theta_B$. Dermed er $\alpha = \cos\theta_B / \cos\phi$ og $\beta = v_1/v_2 = n_2/n_1 = 1/n$ (ettersom medium 1 nå er inne i kula, der brytningsindeksen er n). I punkt **a** hadde vi sammenhengen $\cos\phi = n\cos\theta_B$, og det må jo selvsagt fortsatt holde. Dermed har vi nå $\alpha = 1/n = \beta$. Med andre ord: Stråle 2 treffer grenseflaten akkurat på Brewsters vinkel, slik som den innkommende strålen gjorde! Det betyr at vi også nå har $R_p = 0$, slik at stråle 3 blir fullstendig polarisert normalt på innfallsplanet (n), mens stråle 4 inneholder både n og p. Med kun polarisasjon n i stråle 3 er det klart at også strålene 5 og 6 kun kan ha polarisasjon n.

Oppsummert:

$$1 : n \quad 2 : p + n \quad 3 : n \quad 4 : p + n \quad 5 : n \quad 6 : n.$$

OPPGAVE 6 [telte 16 %]

a

•

$$T_{\text{Newton}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad T_{\text{Einstein}} = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2,$$

der E er partikkelens totale energi og $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ er lorentzfaktoren.

• Når $v/c \ll 1$, blir lorentzfaktoren med god tilnærmelse

$$\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

slik at

$$T_{\text{Einstein}} \simeq (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1)mc^2 = \frac{1}{2}mv^2.$$

• Vi må her ta med ett ledd til i rekkeutviklingen av γ, og med det som er oppgitt på 1. side av oppgaveteksten har vi

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 \ldots,$$

som gir

$$T_{\text{Einstein}} = mc^2(\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 \ldots) = \frac{1}{2}mv^2(1 + \frac{3}{4}\beta^2 \ldots).$$

Det betyr at $a_1 = 0$ og $a_2 = 3/4$.

b

• I lab-systemet (S_0) er total impuls lik null, mens total energi er

$$E_0 = 2mc^2 + 2T.$$

I systemet $\tilde{S}$ ligger ett av de to elektronene i ro, mens det andre har impuls $\tilde{p}$ og kinetisk energi $\tilde{T}$. Total energi i $\tilde{S}$ er derfor

$$\tilde{E} = 2mc^2 + \tilde{T},$$

mens total impuls er $\tilde{p}$.
Uavhengig av hvilket inertialsystem vi gjør målingene i, vil kombinasjonen

$$E^2 - p^2c^2$$

(der E og p er hhv total energi og total impuls) ha samme verdi, dvs den er en såkalt *invariant*. Vi kjenner verdien av denne kombinasjonen i ett inertialsystem, nemlig S_0, der total energi er $E_0 = 2mc^2 + 2T$ og total impuls er null. Dermed har vi sammenhengen

$$E^2 - p^2c^2 = E_0^2 = (2mc^2 + 2T)^2.$$

Videre, hvis vi ser på det ene elektronet som beveger seg i systemet $\tilde{S}$, så har dette energi

$$\tilde{E}_1 = mc^2 + \tilde{T},$$

og dessuten må sammenhengen

$$\tilde{E}_1^2 = \tilde{p}^2c^2 + m^2c^4$$

gjelde. Dermed har vi for dette elektronets impuls:

$$\tilde{p}^2c^2 = \tilde{E}_1^2 - m^2c^4 = (mc^2 + \tilde{T})^2 - m^2c^4 = 2mc^2\tilde{T} + \tilde{T}^2.$$

Vi bruker nå invarians av $E^2 - p^2c^2$ og setter denne kombinasjonen i $\tilde{S}$ lik den tilsvarende i S_0:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}^2 - \tilde{p}^2c^2 &= E_0^2 \\
\Rightarrow (2mc^2 + \tilde{T})^2 - (2mc^2\tilde{T} + \tilde{T}^2) &= (2mc^2 + 2T)^2 \\
\Rightarrow 2mc^2\tilde{T} &= 8mc^2T + 4T^2 \\
\Rightarrow \tilde{T} &= \underline{4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right)}
\end{aligned}$$

• I den ikke-relativistiske grensen $T \ll mc^2$ kan vi neglisjere leddet $T/2mc^2$ i forhold til 1. Dermed er

$$\tilde{T} \simeq 4T.$$

Dette er ikke uventet: Med ikke-relativistisk mekanikk har vi $T = mv^2/2$ og $\tilde{T} = m \cdot (2v)^2/2 = 2mv^2$ ettersom elektronet i bevegelse har den doble hastigheten $2v$ i referansesystemet der det andre ligger i ro. Altså er $\tilde{T} = 4T$, som funnet.

• Dersom vi kun akselererer det ene elektronet, må dette akselereres til en hastighet som nettopp tilsvarer $\tilde{T} = 10^{12}$ eV $= 10^6$ MeV. Men dersom vi akselererer de to elektronene i motsatt retning, må de bare akselereres til hastigheter som tilsvarer kinetisk energi T, gitt ved ligningen

$$\tilde{T} = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right).$$

Siden $mc^2 = 0.5$ MeV, ser vi at verdien for T må bli mye større enn mc^2, så vi kan med god tilnærmelse skrive

$$\tilde{T} = \frac{2T^2}{mc^2},$$

som gir (med alle energier, T, mc^2 og $\tilde{T}$ i enheten MeV)

$$T = \sqrt{mc^2\tilde{T}/2} = \sqrt{0.5 \cdot 10^6/2} = 500\,\text{MeV}.$$

Dette er bare 1/2000 av påkrevd kinetisk energi når bare det ene elektronet akselereres. Dette poenget utnyttes i alle moderne partikkelakseleratorer ("colliders").

Alternativt, for 1. kulepunkt, med bruk av firerimpuls:

$$\begin{aligned}
p^\alpha p_\alpha &= \tilde{p}^\alpha \tilde{p}_\alpha \\
\Rightarrow 4E^2/c^2 &= \left(\frac{\tilde{E} + mc^2}{c}\right)^2 - \tilde{p}^2 \\
&= \frac{\tilde{E}^2 + 2mc^2\tilde{E} + m^2c^4}{c^2} - \left(\tilde{E}^2/c^2 - m^2c^2\right) \\
&= 2m\tilde{E} + 2m^2c^2 \\
\Rightarrow \tilde{E} &= 2E^2/mc^2 - mc^2 \\
\Rightarrow \tilde{T} + mc^2 &= \frac{2(T + mc^2)^2}{mc^2} - mc^2 \\
&= \frac{2T^2}{mc^2} + 4T + mc^2 \\
\Rightarrow \tilde{T} &= 4T\left(1 + T/2mc^2\right)
\end{aligned}$$

Forklaring: Her er $E = T + mc^2$ energien til *hvert* av de to elektronene, målt i labsystemet, slik at $p^\alpha = (2E/c, 0, 0, 0)$ blir total firerimpuls i labsystemet, noe som gir $p^\alpha p_\alpha = 4E^2/c^2$. Videre er $\tilde{E} = \tilde{T} + mc^2$ energien til det ene elektronet i bevegelse, målt i det andre elektronets hvilesystem. Total energi i dette inertialsystemet blir dermed $\tilde{E} + mc^2$, slik at $\tilde{p}^\alpha \tilde{p}_\alpha = ((\tilde{E} + mc^2)/c)^2 - \tilde{p}^2$, med $\tilde{p}^2$ lik kvadratet av (treer-)impulsen, slik at $\tilde{E}^2 = \tilde{p}^2c^2 + m^2c^4$, dvs $\tilde{p}^2 = \tilde{E}^2/c^2 - m^2c^2$.