

## Øving 9

*Tema: Refleksjon og transmisjon av e.m. bølge (normalt innfall). Geometrisk optikk's 3 lover. Grenseflatebetingelser for feltene  $D$ ,  $E$ ,  $B$  og  $H$ .*

### Oppgave 1

a) Planet  $z = 0$  danner grenseflaten mellom to lineære medier 1 ( $z < 0$ ) og 2 ( $z > 0$ ), med permittiviteter og permeabiliteter henholdsvis  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$  og  $\varepsilon_2$ ,  $\mu_2$ . Anta at en plan harmonisk elektromagnetisk bølge kommer inn fra venstre, dvs den forplanter seg i positiv  $z$ -retning. Amplituden til elektrisk felt i innkommende bølge er  $E_{i0}$ . Vis at bølgen som reflekteres i  $z = 0$  har amplitude

$$E_{r0} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} E_{i0}$$

og at bølgen som transmitteres i  $z = 0$  har amplitude

$$E_{t0} = \frac{2}{1 + \beta} E_{i0}$$

Her er

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$$

med  $v_j = c/n_j =$  bølgens (fase-)hastighet i medium  $j$ .  $n_j$  er brytningsindeksen i medium  $j$ . (Dette tilsvarer figuren i oppgave 2, med alle vinkler lik null.)

b) Innkommende bølge har intensitet  $I_i$ . Denne fordeler seg på den reflekterte ( $I_r$ ) og den transmitterte ( $I_t$ ) bølgen. Finn refleksjonskoeffisienten

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i}$$

og transmisjonskoeffisienten

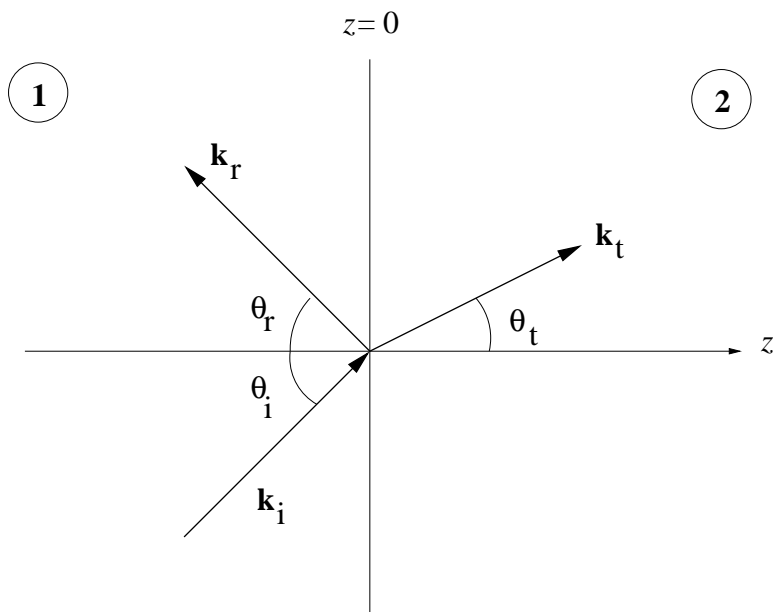
$$T \equiv \frac{I_t}{I_i}$$

uttrykt ved brytningsindeksene  $n_1$  og  $n_2$  i det vi antar at begge medier er umagnetiske, dvs  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Bestem tallverdier for  $R$  og  $T$  for grenseflaten mellom luft ( $\simeq$  vakuum) og glass med relativ permittivitet 2.25.

## Oppgave 2

### Geometrisk optikkens tre lover

Planet  $z = 0$  danner grenseflaten mellom to lineære medier 1 ( $z < 0$ ) og 2 ( $z > 0$ ), med brytningsindekser henholdsvis  $n_1$  og  $n_2$ . Anta at en plan harmonisk elektromagnetisk bølge kommer inn "fra venstre" slik at forplantningsretningen, gitt ved bølgetallsvektoren  $\mathbf{k}_i$ , danner en vinkel  $\theta_i$  med  $z$ -aksen. Innkommende bølge blir delvis reflektert, med bølgetallsvektor  $\mathbf{k}_r$ , og delvis transmittert (evt *refraktert*), med bølgetallsvektor  $\mathbf{k}_t$ , som vist i figuren.



Elektrisk feltvektor for de tre bølgene er

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i0} \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r0} \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

Bølgetallsvektoren  $\mathbf{k}_i$  kan uttrykkes i kartesiske koordinater,

$$\mathbf{k}_i = k_{ix}\hat{x} + k_{iy}\hat{y} + k_{iz}\hat{z}$$

og tilsvarende for  $\mathbf{k}_r$  og  $\mathbf{k}_t$ .

a) Bruk av grensebetingelsene for  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$  i planet  $z = 0$  (betingelser som skal gjelde overalt i dette planet, dvs for alle  $x$  og  $y$  og til alle tider  $t$ ) vil resultere i ligninger på formen

$$A \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) + B \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) = C \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

der koeffisientene  $A$ ,  $B$  og  $C$  ikke avhenger av  $\mathbf{r}$  og  $t$ . (Disse skal ikke bestemmes her.) Bruk dette til å argumentere for at

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$$

for alle mulige posisjoner  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  i grenseflaten  $z = 0$ .

Argumenter videre for at vi da må ha

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

og

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

Men da har vi 3 vektorer med 2 av komponentene identiske, hvilket må bety at de 3 vektorene alle ligger i ett og samme plan. Vi ser dessuten at dette planet står vinkelrett på grenseflaten, hvilket må bety at flatenormalen til grenseflaten også ligger i samme plan som de 3 bølgetallsvektorene.

Dette er geometrisk optikk 1. lov:

Bølgetallsvektorene til innkommende, reflektert og transmittert bølge danner et plan, det såkalte *innfallsplanet*, som også inkluderer flatenormalen til grenseflaten.

b) La oss nå velge  $x$ - og  $y$ -aksene slik at  $\mathbf{k}_i$  ligger i  $xz$ -planet. Vis at da er

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

og dermed

$$\theta_i = \theta_r$$

og

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Dette er henholdsvis 2. lov (refleksjonsloven):

Innfallsvinkelen og refleksjonsvinkelen er like store:  $\theta_i = \theta_r$ .

Og 3. lov (brytningsloven, eller *Snells lov*):

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

### Oppgave 3

(Dette er nok tildels kjent stoff fra FY1003/TFY4155 Elektrisitet og magnetisme. Du må selv vurdere behovet for å repetere det her.)

Bruk Maxwells ligninger,

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} &= q_f \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \\ \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= 0 \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_f + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}\end{aligned}$$

til å utlede grenseflatebetingelsene  $\Delta D_{\perp} = 0$ ,  $\Delta E_{\parallel} = 0$ ,  $\Delta B_{\perp} = 0$  og  $\Delta H_{\parallel} = 0$  for en grenseflate uten fri ladning og strøm. Velg lukkede kurver og flater som antydnet i figuren nedenfor og la  $h \rightarrow 0$ .

