2 ekstratimer 25.11.10

(1) $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

Pion i ro omdannes til myon og (anti-) nøytrino.
Hva blir myonets hastighet v_μ? $(m_\nu = 0)$

Løsning(er): ["Standard metode" først.]

Energibevarelse: $E_\pi = E_\mu + E_\nu$

Impulsbevarelse: $\vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu$

$\vec{p}_\pi = 0 \Rightarrow \vec{p}_\mu = -\vec{p}_\nu$

Bruker $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$:

$$E_\pi = m_\pi c^2$$
$$E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4}$$
$$E_\nu = p_\nu c = p_\mu c \qquad (m_\nu = 0,\ |\vec{p}_\nu| = |\vec{p}_\mu| = p_\mu)$$

$$\Rightarrow m_\pi c^{\cancel{2}} = \cancel{c}\sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2 c^2} + p_\mu \cancel{c}$$

$$\Rightarrow (m_\pi c - p_\mu)^2 = \left(\sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2 c^2}\right)^2 = p_\mu^2 + m_\mu^2 c^2$$

$$\Rightarrow m_\pi^2 c^{\cancel{4}} - 2 m_\pi \cancel{c}\, p_\mu + \cancel{p_\mu^2} = \cancel{p_\mu^2} + m_\mu^2 c^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow p_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c$$

$$\Rightarrow E_\mu = \left\{ \left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}\right)^2 c^4 + m_\mu^2 c^4 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \frac{m_\pi^4 - 2m_\pi^2 m_\mu^2 + m_\mu^4 + 4 m_\pi^2 m_\mu^2}{4 m_\pi^2} c^4 \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

Generelt har vi $E = \gamma m c^2$ og $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$\Rightarrow \frac{\vec{p}}{E} = \frac{\gamma m \vec{v}}{\gamma m c^2} = \frac{\vec{v}}{c^2} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{\vec{p} c^2}{E}}$$

Dermed:

$$v_\mu = \frac{p_\mu c^2}{E_\mu} = \underline{\underline{\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c}}$$

Tallverdier: $m_{\pi^-} = 139.569 \ MeV/c^2$, $m_{\mu^-} = 105.659 \ MeV/c^2$

$$\Rightarrow v_\mu = \underline{0.27c}$$

⇒ To tips: (for enkelt partikkel!)

1. Hvis E eller $\vec{p}$ er kjent, bruk $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ til å finne den ukjente. Unngå v eksplisitt "så lenge som mulig".

2. Når E og $\vec{p}$ er kjent, er hastigheten bestemt ved $\vec{v} = \vec{p}c^2/E$

Resten av s. 111 og s. 112 ble ikke gjennomgått 25.11.10.

Løsning med 4-vektorer p^α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$:

Energi- og impulsbevarelse: $p_\pi^\alpha = p_\mu^\alpha + p_\nu^\alpha$

$\left(\alpha = 0: \ \frac{E_\pi}{c} = \frac{E_\mu}{c} + \frac{E_\nu}{c}; \ \alpha = 1,2,3: \ \vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu \right)$

Invarianten $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, evt. $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2c^2$,
pr partikkel og for hele systemet, blir: $p^\alpha p_\alpha = m^2c^2$

⇒ Vi "trenger" kvadratiske ledd i p
⇒ Vi "kvadrerer" $p_\pi^\alpha = p_\mu^\alpha + p_\nu^\alpha$, evt $p_\nu^\alpha = p_\pi^\alpha - p_\mu^\alpha$:
[Dvs: Skalarproduktet av begge sider med seg selv!]

$$p_\nu^\alpha (p_\nu)_\alpha = p_\pi^\alpha (p_\pi)_\alpha + p_\mu^\alpha (p_\mu)_\alpha - 2 p_\pi^\alpha (p_\mu)_\alpha$$

Siden $m_\nu = 0$ og $\vec{p}_\pi = 0$ (i ro!) får vi

$$p_\nu^\alpha (p_\nu)_\alpha = 0, \quad p_\pi^\alpha (p_\mu)_\alpha = \frac{E_\pi}{c}\cdot\frac{E_\mu}{c} - \vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_\mu = \frac{E_\pi E_\mu}{c^2} = m_\pi E_\mu$$

($E_\pi = m_\pi c^2$ når $\vec{p}_\pi = 0$!)

og dessuten

$$p_\pi^\alpha (p_\pi)_\alpha = m_\pi^2 c^2, \quad p_\mu^\alpha (p_\mu)_\alpha = m_\mu^2 c^2$$

Dermed: $$0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2 m_\pi E_\mu$$

$$\Rightarrow \underline{E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2 m_\pi} c^2} \qquad \text{(OK)}$$

"Kvadrering" av $p_\mu^\alpha = p_\pi^\alpha - p_\nu^\alpha$ gir

$$m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 + 0 - 2 \underbrace{\frac{E_\pi}{c}}_{m_\pi c} \cdot \frac{E_\nu}{c} = m_\pi^2 c^2 - 2 m_\pi E_\nu$$

og med $E_\nu = |\vec{p}_\nu| c = |\vec{p}_\mu| c$ gir det

(OK!) $$\underline{|\vec{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2 m_\pi} c}, \quad \text{og} \quad v_\mu = |\vec{p}_\mu| c^2 / E_\mu = \underline{\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c}$$ som før

Kommentar: Inket å "spare" med bruk av 4-vektorer her, men mer å hente når feks. flere partikler.

⇒ Tips 3: Utnytt kompakt notasjon med 4-vektorer, og invarians av $a^\alpha b_\alpha$!

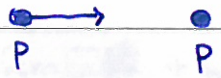
② Antiproton $\bar{p}$ kan skapes ved å skyte proton p mot proton i ro:

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

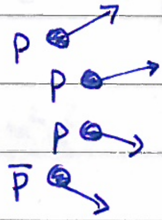
Hvor stor energi E må protonet minst ha? $(m_p = m_{\bar{p}} = m)$
(= terskelenergien)

I labsystemet S:

Før:



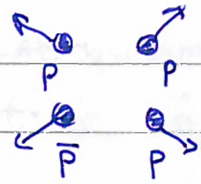
Etter:



I "impulssentersystemet" S_0, dvs der $\sum_i \vec{p}_i = 0$
(COM = center of momentum system):

Før:

Etter:



Terskelenergi i S_0: $E_0 = 4mc^2$; alle partiklene i ro etter kollisjonen.
[Dvs: minste totale energi i S_0!]

$p^\alpha = \left(\frac{E + mc^2}{c}, |\vec{p}|, 0, 0\right)$ = total 4-impuls i S før kollisjonen (med $\vec{p} \sim \hat{x}$)

$p_0^\alpha = (4mc, 0, 0, 0)$ = total 4-impuls i S_0 etter kollisjonen ved "threshold"

Nå er p^α og p_0^α bevart (men $p^\alpha \neq p_0^\alpha$, åpenbart!), og $p^\alpha p_\alpha$ og $(p_0)^\alpha (p_0)_\alpha$ invariante.

Da må vi ha: $p^\alpha p_\alpha = (p_0)^\alpha (p_0)_\alpha$

$$\Rightarrow \left(\frac{E+mc^2}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = (4mc)^2$$

For innkommende proton: $E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2 = m^2c^4 \Rightarrow \vec{p}^{\,2} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - m^2c^2$

$$\Rightarrow \frac{E^2}{c^2} + 2mE + m^2c^2 - \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2\right) = 16m^2c^2$$

$$\Rightarrow 2mE = 14m^2c^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E = 7mc^2}}$$

$E = E_k + mc^2 \Rightarrow$ innk. proton må ha $E_k \geq 6mc^2$ for at $\bar{p}$ kan dannes

Tips:

4. Et problem som er vanskelig å løse i LAB-systemet kan være lett å løse i COM-systemet: $\vec{p}_{før} = \vec{p}_{etter} = 0$ kan gjøre susen!

Hit 25.11.10