Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002: Bølgefysikk
Høsten 2006, uke 34

Mandag 21.08.06

Hvorfor bølgefysikk?

Man støter på bølgefenomener overalt. Eksempler:

- overflatebølger på vann
- akustiske bølger (f.eks. lyd)
- elektromagnetiske bølger (f.eks. lys)
- partikkelbølger (partikler som elektroner er også bølger!)
- seismiske bølger

Dermed: Viktig å forstå bølgefysikk for å kunne

- forstå virkeligheten omkring seg
- bidra i mange teknologiske sammenhenger

Mange senere emner i studiet bygger på kunnskap i bølgefysikk. Eksempler: Optikk, Kvantefysikk, Faststoff-fysikk etc. etc.

Del I: SVINGNINGER.

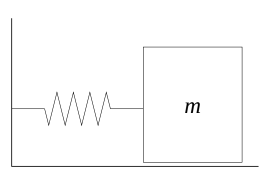
[FGT 13; YF 13; TM 14; AF 10; LL 9]

Svingninger (oscillasjoner) er: periodisk (repeterende) oppførsel (bevegelse) omkring en likevektsposisjon.
(Bølger er *forplantning* av svingninger.)

Eksempler på svingesystemer:

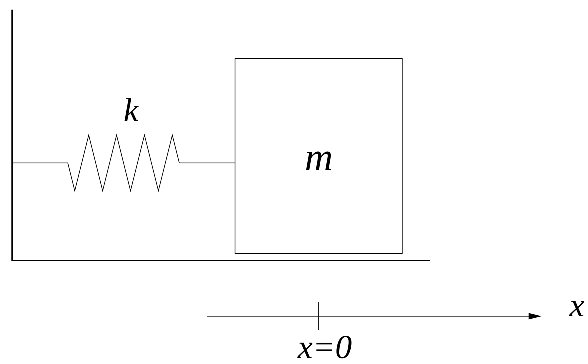
- person i huske (pendel)
- gitarstreng
- atom i molekyl
- atom i fast stoff (krystallgitter)
- elektroner i antenne

Vi betrakter her kun svingninger i 1 dimensjon og bruker som modellsystem en masse festet til ei fjær:



I tillegg til udempet harmonisk svingning ser vi på dempet svingning og tvungen svingning.

Enkel harmonisk svingning
[FGT 13.1-13.3; YF 13.2; TM 14.1,14.3; AF 10.2-10.5; LL 9.1-9.3]



Idealisert modell: friksjonsfritt underlag, og Hookes lov antas å gjelde for fjæra:

$$F = kx$$

Her er k fjærkonstanten, med dimensjon $[k] = \mathrm{N/m}$. I praksis gjelder Hookes lov for små utsving fra likevekt.

Kraft på m dersom fjæra strekkes en lengde x (sammenpresset fjær, $x < 0$, er også inneholdt her):

$$F = -kx$$

Bevegelsen til m, dvs $x(t)$, gitt ved Newtons 2.lov:

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

som gir

$$-kx = m\ddot{x}$$

eller

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Vi innfører $\omega = \sqrt{k/m}$, som gir

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Dette er en 2. ordens homogen differensialligning (DL) for $x(t)$. Vi ser uten videre at både $\sin\omega t$ og $\cos\omega t$ er aktuelle løsninger, ettersom

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin\omega t = -\omega^2\sin\omega t$$

og

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t = -\omega^2\cos\omega t$$

En *generell* løsning er dermed

$$x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$$

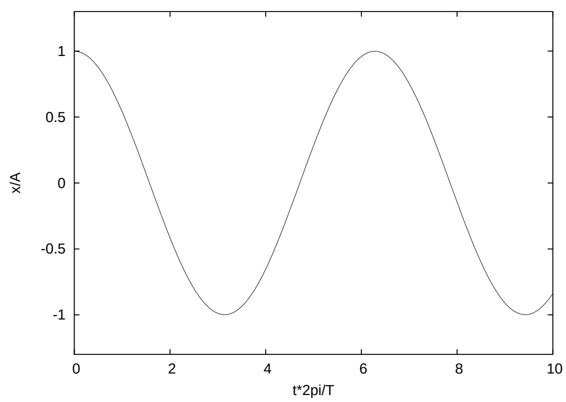
Her må vi kjenne to såkalte *initialbetingelser*, f.eks. $x(0)$ og $v(0) = \dot{x}(0)$, for å få fastlagt de to integrasjonskonstantene B og C.

En alternativ form på den generelle løsningen er

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

der vi også har to integrasjonskonstanter, A og ϕ, som må fastlegges ved hjelp av to initialbetingelser. Ved hjelp av standard trigonometriske relasjoner (se Rottmann!) vil en finne at de to alternative løsningsformene er identiske dersom $B = A\cos\phi$ og $C = -A\sin\phi$.

Med eksempelvis valget $\phi = 0$ vil massens utsving $x(t)$ se slik ut:



Her har vi skalert begge aksene. Noen begreper:

- A = svingningens *amplitude* = maksimalt utsving
- T = perioden
- $f = 1/T$ = frekvensen = antall svingninger pr tidsenhet
- $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ = vinkelfrekvensen
- $\omega t + \phi$ = *fasen* til svingningen
- ϕ = fasekonstanten

Massen svinger med (vinkel-)frekvens $\omega = \sqrt{k/m}$ når systemet overlates til seg selv. Vi kaller derfor ω for systemets *egenfrekvens* eller *naturlige frekvens*.

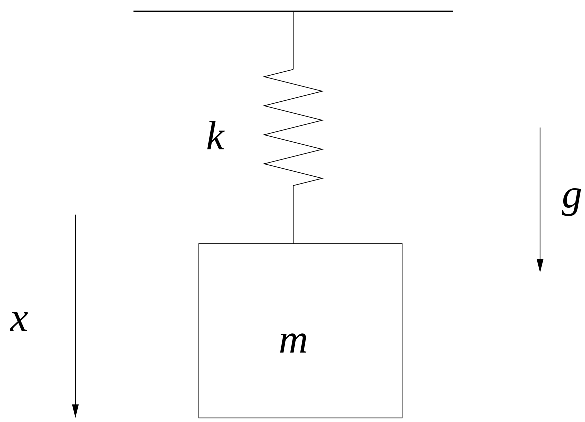
Vi kan nå lett regne ut massens hastighet $v(t)$ og akselerasjon $a(t)$:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) = \omega A\cos(\omega t + \phi + \pi/2)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \phi + \pi)$$

Altså er v *faseforskjøvet* $\pi/2$ i forhold til x, og a videre $\pi/2$ i forhold til v.

Harmonisk oscillator i tyngdefeltet
[FGT 13.3; YF 13.4]



Den konstante tyngdekraften mg fører til at likevektsposisjonen flyttes fra $x = 0$ (uten tyngdefelt) til $\Delta x = mg/k$ (for da er fjærkrafta $-k\Delta x$ og tyngdekrafta mg tilsammen lik null).
Total kraft på m når den er i posisjon x:

$$F = -kx + mg$$

Bevegelsen $x(t)$ fås ved hjelp av Newtons 2. lov:

$$-kx + mg = m\ddot{x}$$

Løses f.eks. ved å substituere $x' = x - \Delta x$:

$$\begin{aligned} -k(x' + \Delta x) + mg &= m\frac{d^2}{dt^2}(x' + \Delta x) = m\frac{d^2 x'}{dt^2} \\ -kx' &= m\frac{d^2 x'}{dt^2} \\ x'(t) &= A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

med $\omega = \sqrt{k/m}$, dvs som uten tyngdefelt. Dermed:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \Delta x$$

dvs enkel harmonisk svingning omkring den nye likevektsposisjonen $\Delta x = mg/k$.

Energibetraktninger for enkel harmonisk oscillator
[FGT 13.4; YF 13.3; TM 14.2; AF 10.4; LL 9.4]

Kinetisk energi:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

Potensiell energi:

$$E_p = -\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_0^x (-kx')dx' = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Total energi:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

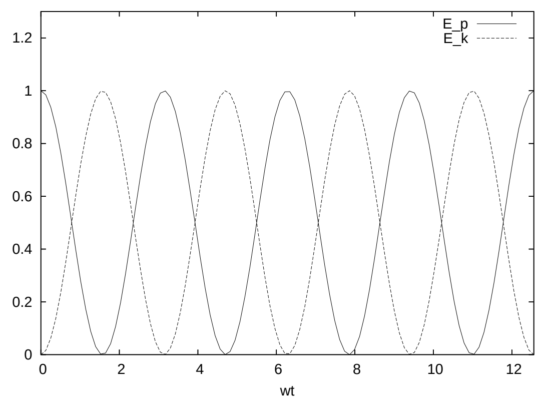
Med andre ord: total energi E er *bevart*, dvs uavhengig av tida t. Og det er jo som ventet med en slik *konservativ* kraft

$$\boldsymbol{F} = -\nabla E_p = -\hat{x}\frac{dE_p}{dx} = -kx\hat{x}$$

Vi har $x_{\max} = A$ og $v_{\max} = \omega A$, så vi kan skrive

$$E = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

Energien pendler mellom kinetisk og potensiell energi:



Her er E_p og E_k plottet i enheter av $kA^2/2$ som funksjon av ωt.