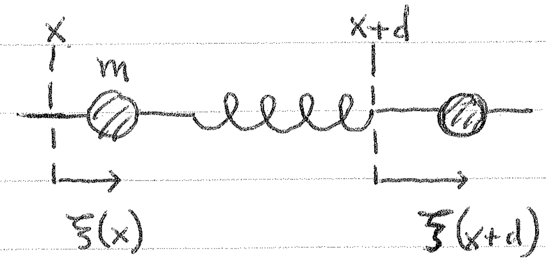
(18.09.06) Impuls transportert med bølge



$\Rightarrow$ vi har masse m på lengden $d + \underbrace{\xi(x+d)}_{\approx \xi(x) + d\frac{\partial \xi}{\partial x}} - \xi(x) \approx d\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$

(med hastighet $\frac{\partial \xi}{\partial t}$)

massebevarelse

$$\Rightarrow \quad (\mu + \Delta\mu)\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) d = \underbrace{\mu d}_{\text{ved likevekt}}$$

$\Delta\mu$: avvik fra massetetthet μ ved likevekt

$$\Rightarrow \quad \Delta\mu = -\mu \frac{\partial \xi / \partial x}{1 + \partial \xi / \partial x} \overset{\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \ll 1}{\approx} -\mu \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ impuls (p) pr lengdeenhet ("impulstetthet") $= \pi(x,t) =$

$$(\mu + \Delta\mu)\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left(\mu - \mu \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mu \frac{\partial \xi}{\partial t}\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

(Eks:) Midlere impulstetthet for sinusbølge $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ = ?

$$\langle \pi \rangle = \langle -\mu\omega\xi_0 \cos(kx-\omega t) + \mu\omega\xi_0 k \xi_0 \cos^2(kx - \omega t)\rangle$$

$$= -\mu\omega\xi_0 \underbrace{\langle \cos(kx-\omega t)\rangle}_{=0} + \mu\omega^2 \underbrace{\frac{k}{\omega}}_{1/v} \xi_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(kx-\omega t)\rangle}_{1/2} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2}{v}$$

$$= \frac{\langle \varepsilon \rangle}{v}$$

Dvs: $\boxed{\text{Midlere impulstetthet} = \dfrac{\text{Midlere energitetthet}}{\text{Bølgehastigheten}}}$

Viser seg å holde generelt, også for e.m. bølger!

(FGT 14.4, 14.7, AF 28.5 28.6, YF 16.1, 16.2)

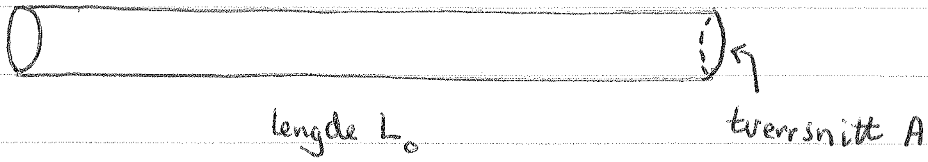
15.09.06 (LL 10.6, TM 15.2) 38

Lydbølger

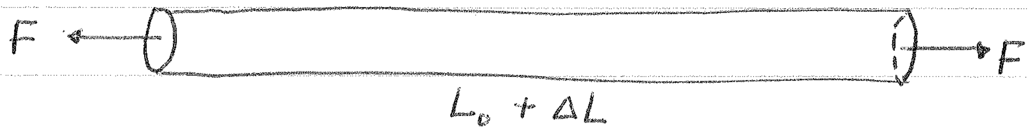
= longitudinale bølger i elastisk medium

Lydbølger i (tynn) stang

Likevekt:



Strekk-kraft F $\Rightarrow$ forlengelse ΔL:

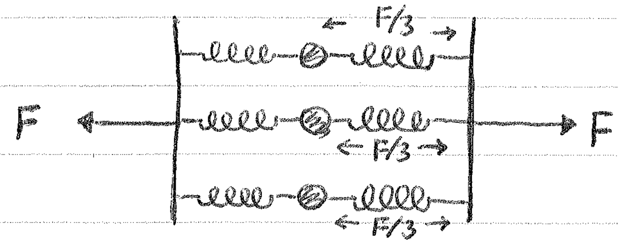


Hookes lov: $F = k \cdot \Delta L$

større L_0 $\Rightarrow$ mindre k $\Rightarrow$ $F = k \cdot L_0 \dfrac{\Delta L}{L_0} = \underset{\text{uavh. av } L_0}{K} \cdot \dfrac{\Delta L}{L_0}$

større A $\Rightarrow$ større k og K:

Eks:



$\Rightarrow$ For gitt L_0 og F vil $\Delta L = \dfrac{F \cdot L_0}{K}$ avta prop. med antall fjærer

$\Rightarrow K$ prop. med A $\Rightarrow Y = K/A$ uavh. av L_0 og A, dvs en materialkonstant

Dermed:

$$\frac{F}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L_0}$$

$\frac{F}{A}$ = kraft pr flateenhet = mekanisk spenning = "stress" $[N/m^2]$

$\frac{\Delta L}{L_0}$ = relativ tøyning = "strain"

Y = "~~[illegible]~~ Youngs modul" (en elastisk modul) ("elastisitetsmodulen")

Generelt, for lineær respons i elastiske medier:

$$\boxed{\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} * \text{relativ tøyning}}$$

("stress = elastic modulus * strain")

Bølgehastighet og energi- og impulsforhold analogt med masse/fjær-transmisjonslinjen (med "lengde" erstattet av "volum")

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (\rho = \text{masse pr volumenhet})$$

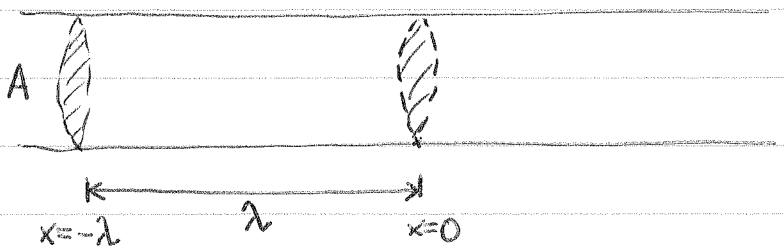
$$\left.\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 \quad [J/m^3] \\ \bar{\pi} &= \langle \pi \rangle = \frac{\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2}{v} \quad [N \cdot s/m^3] \end{aligned}\right\} \text{for harmonisk bølge med amplitude } \xi_0 \ [m]$$

Overført energi pr tidsenhet (dvs effekten) blir nå prop. med tverrsnittet A, siden energien pr lengdeenhet blir ~~[illegible]~~ $\bar{\varepsilon} \cdot A$.

⇒ innfører bølgens intensitet I som overført energi pr tidsenhet og pr flateenhet:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{\bar{\varepsilon} \cdot A \cdot \lambda / T}{A} = \bar{\varepsilon} \cdot v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 \, v \quad \left(W/m^2\right)$$

Forklaring:



bølge-energi mellom $-\lambda$ og 0 = $\bar{\varepsilon} \cdot A \cdot \lambda$, passerer $x=0$ i løpet av tiden T $\Rightarrow I = \bar{\varepsilon} A \lambda / AT = \bar{\varepsilon} v$

Talleksempel: Jern (Fe) har $Y = 1.9 \cdot 10^{11}$ N/m² og $\rho = 7200$ kg/m³. Bly (Pb) har $Y = 0.16 \cdot 10^{11}$ N/m² og $\rho = 11340$ kg/m³. Finn lydhastigheten i disse to metallene.

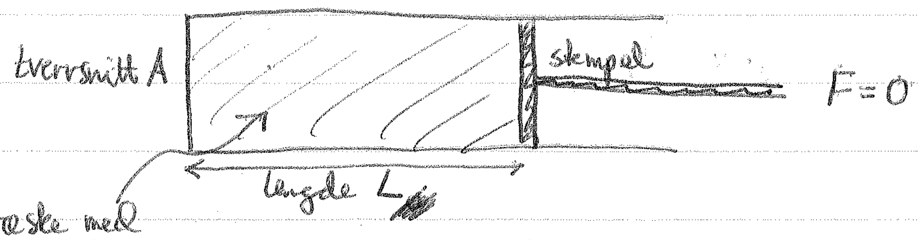
$$v(Fe) = \sqrt{\frac{190 \cdot 10^9}{7.2 \cdot 10^3}} \ m/s = \sqrt{\frac{190}{7.2}} \cdot 10^3 \ m/s \approx 5.1 \cdot 10^3 \ m/s$$

$$v(Pb) = \sqrt{\frac{16 \cdot 10^9}{11.34 \cdot 10^3}} \ m/s = \sqrt{\frac{16}{11.34}} \cdot 10^3 \ m/s \approx 1.2 \cdot 10^3 \ m/s$$

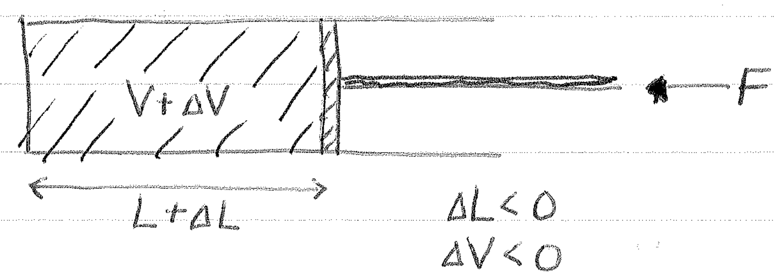
Fe er hardt og ikke altfor tungt ⇒ stor v

Pb er bløtt og tungt ⇒ moderat v

Lydbølger i væsker



væske med volum $V = A \cdot L$, tetthet ρ



$$\frac{F}{A} = -B\,\frac{\Delta L}{L} = -B\,\frac{\Delta V}{V} \qquad \left(\Delta V = \Delta(A \cdot L) = A \cdot \Delta L\right)$$

(spenning = elastisk modul · relativ tøyning)

B = bulkmodulen $[N/m^2]$

massen er bevart $\Rightarrow m = \rho \cdot V = \text{konst.}$ $\quad (\rho = m/V)$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta \rho}{\rho} \qquad \left(\frac{\Delta V}{\Delta \rho} = -\frac{m}{\rho^2} = -\frac{V}{\rho}\right)$$

Lydhastighet i væsken: $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$

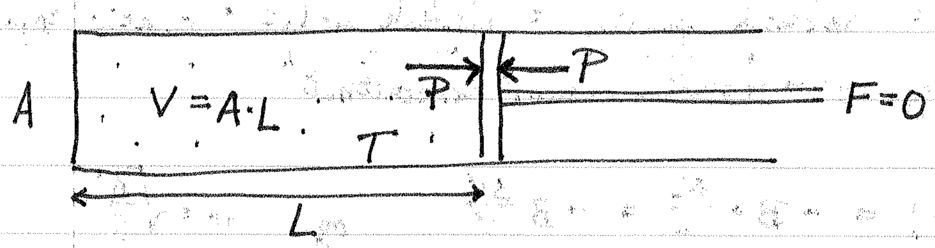
Eks: Vann har $B = 2.1 \cdot 10^9 \ N/m^2$ og $\rho = 1000 \ kg/m^3$

$$\Rightarrow v_{H_2O} = \sqrt{2.1} \cdot 10^3 \ m/s \approx \underline{1.45 \cdot 10^3 \ m/s}$$

Lydbølger i gasser (FGT 14.4, AF 28.6, YF 16.2, LL 10.6)

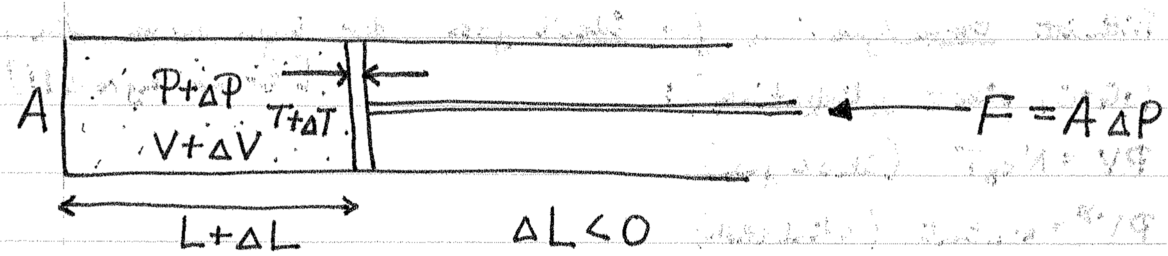
ν: 0 — 20 — 20000 (Hz)

infrasonisk — hørbart område — ultrasonisk



P = trykk = kraft pr flateenhet

T = temperatur



$\Delta L < 0$

$\Delta V < 0$

$\Delta P > 0 \quad \Delta T > 0$

Hit 18.09.06

Gassens tilstandsligning: PV^{γ} = konstant (se TFY4165/FY1005 Termisk fysikk)

(når varmeisolert fra omgivelsene; såkalt adiabatisk) $\gamma = c_p/c_v > 1$ ("adiabatkonstanten")

$$\Delta\left(PV^{\gamma}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta P \cdot V^{\gamma} + P\gamma V^{\gamma-1}\Delta V = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Delta P}_{\frac{F}{A},\ \text{"stress"}} = -\gamma P\,\Delta V/V = -\underbrace{\gamma P}_{\substack{\text{bulkmodulen} \\ B=\gamma P}}\ \underbrace{\frac{\Delta L}{L}}_{\text{relativ tøyning}}$$

Ikke

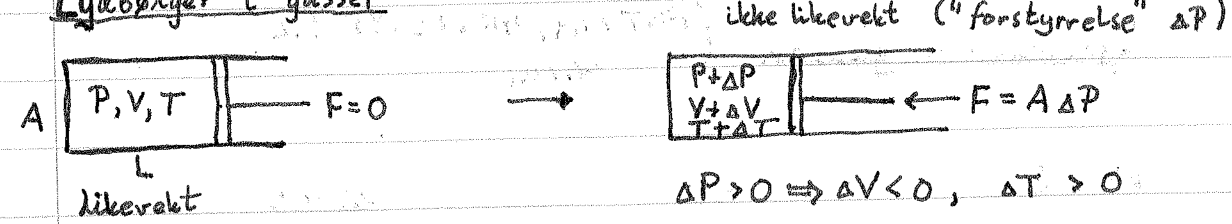
$\Rightarrow$ Lydhastighet i gassen: $v = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$

Ideell gass: $PV = Nk_B T$ evt. $P = nk_BT$ $\quad (n = N/V)$

(20.09.06) Tar 42B, 43B (og 44B hvis tid)

(42B)

Lydbølger i gasser



$\Delta P > 0 \Rightarrow \Delta V < 0\,,\quad \Delta T > 0$

Holde generelt: mekanisk spenning = elastisk modul · relativ tøyning

og $v = \sqrt{\text{elastisk modul} / \text{massetetthet}}$

Altså:

$$\Delta P \;\left(= \frac{F}{A}\right) = -B \cdot \frac{\Delta L}{L} = -B\,\frac{\Delta V}{V} \qquad \text{og} \qquad v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Bittelitt termodynamikk for ideell gass der ingen varme utveksles [tar mye lengre tid!]

($\Delta Q = 0$, såkalt adiabatisk):

$PV = Nk_BT$ (ideell gass)

og $PV^{\gamma} = \text{konstant}$ (adiabatisk)

$\gamma = C_p/C_v\,,\quad C_p = (dQ/dT)_p$ = gassens varmekapasitet når P holdes konstant

$C_v = (dQ/dT)_v$ = ——— " ——— V ——— " ———

$\gamma = \frac{5}{3}$ (1-atomige molekyler), $\gamma = \frac{7}{5}$ (2-atomige molekyler, f.eks N_2, O_2, luft!)

[Mer om dette i Termisk fysikk, Kvantemekanikk, Statistisk mekanikk]

Dermed:

$$\Delta(PV^{\gamma}) = \Delta P\cdot V^{\gamma} + P\cdot\gamma V^{\gamma-1}\,\Delta V = \Delta(\text{konstant}) = 0$$

$\Rightarrow \quad \Delta P = -\gamma P\,\Delta V/V \qquad$ [større enn $-P\frac{\Delta V}{V}$ pga økning i T]

$\Rightarrow \quad \boxed{B = \gamma P}$ bulkmodul for (ideell) gass

$\Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\gamma P/\rho}}$ lydhastigheten i (ideell) gass

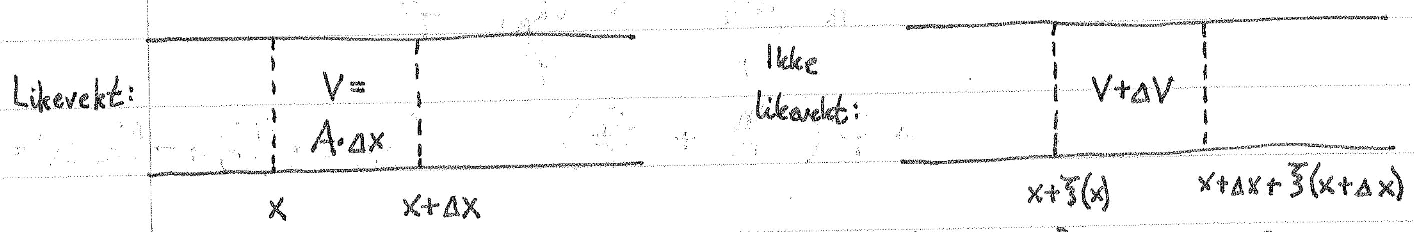
Alternativt: $P = \frac{Nk_BT}{V}\,,\quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{N\cdot m}{V}$ der m = (midlere) molekylmasse

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\gamma N k_B T/V}{Nm/V}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}}$$

43B

Lydbølgen tilsvarer også her partiklers utsving $\xi(x,t)$ fra likevekt.
(Dvs: middelverdi for mange molekyler med tilfeldige bevegelser !)

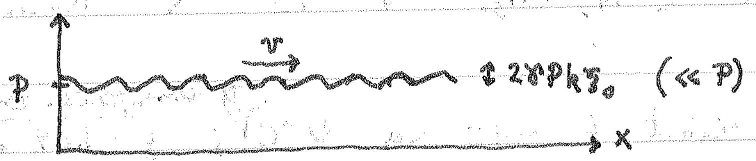


$$\Delta V = A\{\xi(x+\Delta x)-\xi(x)\} \approx A\{\xi(x)+\Delta x\frac{\partial \xi}{\partial x}-\xi(x)\} = A\,\Delta x\,\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \Delta P = -B\frac{\Delta V}{V} = -\gamma P\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Harmonisk bølge : $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx-\omega t)$

$\Rightarrow \Delta P(x,t) = -\gamma P k \xi_0 \cos(kx-\omega t)$ (trykkbølge)



Intensiteten : $I = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 v$ (W/m^2)

Knapt hørbar lyd : $I = I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ ("referansenivå")

Samtale : $I \sim 10^{-6}\ W/m^2$

Smertegrensen : $I \sim 1\ W/m^2$

(LL 10.6, TM 15.3)

Store variasjoner $\Rightarrow$ innfører logaritmisk skala : Intensitet i dB (desibel, etter AG Bell)

$$= 10\log_{10}(I/I_0)$$

Eksempler : Samtale : $10\log_{10}\frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10\cdot 6 = 60\ dB$

Smertegrensen : $10\log_{10}\frac{10^{0}}{10^{-12}} = 10\cdot 12 = 120\ dB$

Dobling av I : $10\log_{10}\frac{2I}{I_0} = 10\log_{10}2 + 10\log_{10}\frac{I}{I_0} \approx 3dB + 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$

dvs økning på 3dB (uavh. av hva I var)

(44B)

Eksempler:

Lydhast. i luft ved 1 atm. trykk = ? $(\rho \approx 1.3\ \mathrm{kg/m^3})$

Løsning: $1\ \mathrm{atm} \equiv 101325\ \mathrm{N/m^2} \approx 10^5\ \mathrm{N/m^2}$ $[= 10^5\ \mathrm{Pa}$ (pascal)$]$

$\gamma \approx \frac{7}{5}$ (stort sett N_2 og O_2)

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^5}{5 \cdot 1.3}} \approx \underline{330\ \mathrm{m/s}}$$

Lydhast. i He^{IV} ved 1 atm. trykk = ? (molart volum $v_M = 22.4\ \mathrm{L}$)

Løsning: $m(1\,\mathrm{mol}) = N_A \cdot m_{He^{IV}} = 6 \cdot 10^{23} \cdot 4 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \approx 0.004\ \mathrm{kg}$

$$\Rightarrow \rho = 0.004\ \mathrm{kg} / 22.4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3} \approx 0.18\ \mathrm{kg/m^3}$$

~~Sjekk opp tettheten på He her! (Se f.eks. tabellbok)~~

$\gamma = 5/3$ (1-atomige molekyler)

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^5}{3 \cdot 0.18}} \approx \underline{960\ \mathrm{m/s}}$$

Normal samtale; midlere utsvingsamplitude $\xi_0 = ?$ (anta $\nu = 1000\ \mathrm{Hz}$)

Løsning: $I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 v \Rightarrow \xi_0 = \frac{1}{\omega}\sqrt{2I/\rho v} = \frac{1}{2000\pi}\sqrt{2 \cdot 10^{-6}/1.3 \cdot 330} \approx \underline{11\ \mathrm{nm}}$

... og midlere (partikkel-) hastighetsamplitude = ?

Løsning: $\dot{\xi} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t) \Rightarrow$ amplitude $2\pi\nu\xi_0 \sim 2000\pi \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/s} \sim \underline{7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m/s}}$

$(\ll v)$

Relativ trykkendring ved normal samtale = ?

Løsning: $\Delta P = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\underbrace{P\gamma k \xi_0}_{(\Delta P)_0} \cos(kx - \omega t)$

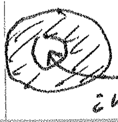
$$\Rightarrow \frac{(\Delta P)_0}{P} = \gamma k \xi_0 = \frac{2\pi\gamma\xi_0}{\lambda} = \frac{2\pi\gamma\xi_0}{v/\nu} \sim \frac{2\pi \cdot \frac{7}{5} \cdot 10^{-8}}{330/1000} \sim \underline{3 \cdot 10^{-7}}$$

"Sluttkommentar":

Også mulig med transversale bølger i faste stoffer: $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

G = "skjærmodulen" $< B \Rightarrow$ går langsommere enn de longitudinale

Seismikk/Jordskjelv: $\underbrace{\text{P-bølger (long)}}_{\text{kommer først}}$ og $\underbrace{\text{S-bølger (transv.)}}_{\text{kommer senere, mer ødeleggende}}$

Jorda  væske i kjernen (ingen S-bølger går her!)