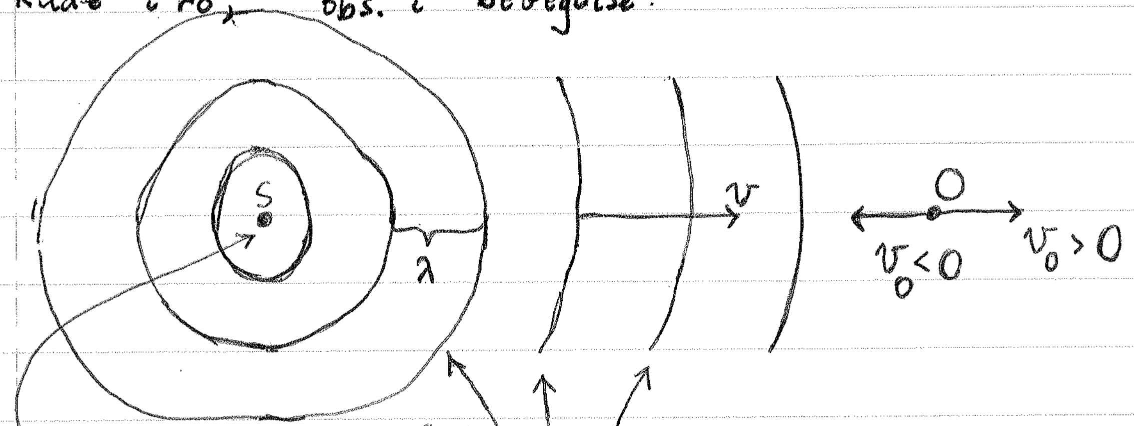
2.10.06

Dopplereffekten (LL 10.8, TM 15.5)

(for lydbølger) (C. J. Doppler 1803-53, østerriksk fysiker)

Kvalitativt: Lydkilde S ("source") og observatør O i relativ bevegelse $\Rightarrow$ O måler frekvens $\nu' \neq$ frekvens ν sendt ut av S

Kilde i ro, obs. i bevegelse:



punktformet kilde $S^{(i\ ro)}$, kuleformede bølgefronter med hastighet $v = \lambda/T = \lambda\nu$, antar $|v_0| < v$

en O i $\overbrace{\text{ro}}^{(v_0=0)}$ mottar ν bølgefronter pr tidsenhet $\Rightarrow \nu' = \nu$

en O i bevegelse mot S $^{(v_0<0)}$ mottar flere enn ν bølgefronter pr tidsenhet $\Rightarrow \nu' > \nu$

en O i bevegelse bort fra S $^{(v_0>0)}$ mottar færre enn ν bølgefronter pr tidsenhet $\Rightarrow \nu' < \nu$

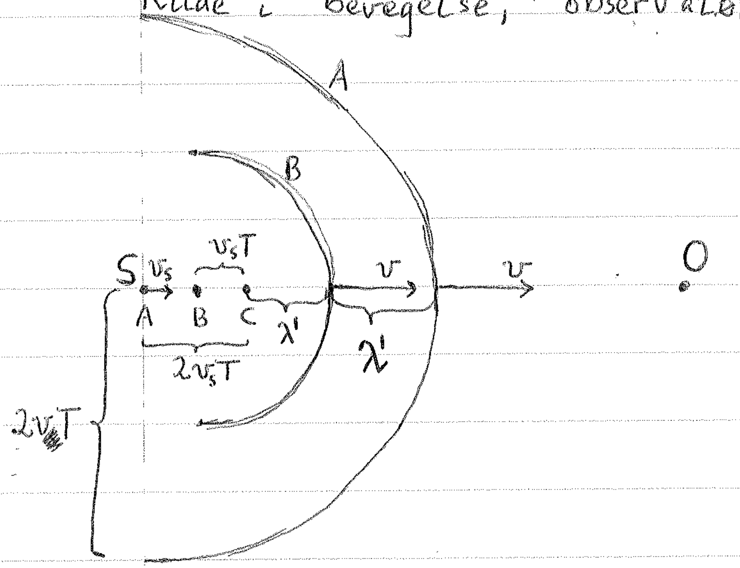
"Tilsynelatende" bølgehastighet målt av O : $v' = v - v_0$

Bølgelengde målt av O : λ

$\Rightarrow$ Frekvens målt av O : $\boxed{\nu' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v - v_0}{\lambda} = \frac{v - v_0}{v}\,\nu}$

Akustisk dopplereffekt med kilde i ro og observatør i bevegelse.

Kilde i bevegelse, observatør i ro:



Ser fra figuren:
$2v_sT + 2\lambda' = 2vT$

observatør O i ro, kuleformede bølgefronter med hastighet $v = \lambda\nu$,
kilde S med hastighet v_s mot $(v_s > 0)$, eventuelt bort fra $(v_s < 0)$ O

S i posisjon A ved $t = 0$ lager bølgefront A med radius $2vT$
og sentrum i A ved $t = 2T$

S i posisjon B ved $t = T$ lager bølgefront B med radius T
og sentrum i B ved $t = 2T$

S i posisjon C ved $t = 2T$ lager bølgefront C med radius null
og sentrum i C ved $t = 2T$

Bølgehastighet målt av O: v
Tilsynelatende bølgelengde målt av O: $\lambda' = (v - v_s)T$

$\Rightarrow$ Frekvens målt av O: $\boxed{\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_s}\frac{1}{T} = \frac{v}{v - v_s}\nu}$

Akustisk doppler-effekt med observatør i ro og kilde i bevegelse.

Både kilde og observatør i bevegelse:

$S \longrightarrow v_s \qquad\qquad O \longrightarrow v_o$

ν = frekvens målt av S

ν' = frekvens målt av O $= \dfrac{\text{tilsynelatende bølgehastighet målt av } O}{\text{tilsynelatende bølgelengde målt av } O}$

$$= \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v - v_o}{(v - v_s)\,T}$$

Dvs:

$$\boxed{\nu' = \frac{v - v_o}{v - v_s}\,\nu}$$

Mediet i bevegelse (f.eks. vind):

$S \longrightarrow v_s \qquad \longrightarrow v_m \qquad O \longrightarrow v_o$

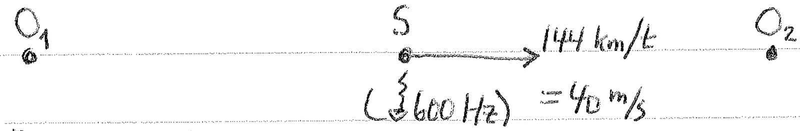
v = bølgehastigheten relativt til mediet

$\Rightarrow$ $v + v_m$ = ——— " ——— bakken (dvs: der O er i ro hvis $v_o = 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\nu' = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s}\,\nu}$$

(der mediets hastighet v_m er positiv når det beveger seg i samme retning som bølgen)

Eks 1: Bil med sirene, $\nu_0 = 600\,Hz$, fart $144\,km/t$. Finn frekvensene ν_1 og ν_2 som måles av observatører hhv bak og foran bilen.
(Lydfart: $340\,m/s$)

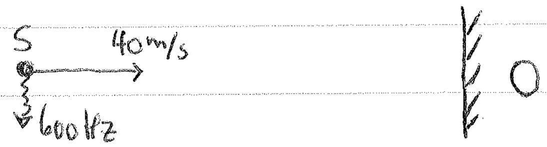


$$\nu_2 = \frac{v}{v - v_s}\nu_0 = \frac{340}{300}\cdot 600\,Hz = 680\,Hz$$

$$\nu_1 = \frac{v}{v + v_s}\nu_0 = \frac{340}{380}\cdot 600\,Hz \approx 537\,Hz$$

(Merk: $|\nu_2 - \nu_0| \neq |\nu_1 - \nu_0|$)

Eks 2: Bilen fra Eks 1 kjører mot vegg som reflekterer lydbølgen. Finn frekvensen som sjåføren hører (i tillegg til $\nu_0 = 600\,Hz$).



Veggen "måler" og reflekterer lydbølge med frekvens

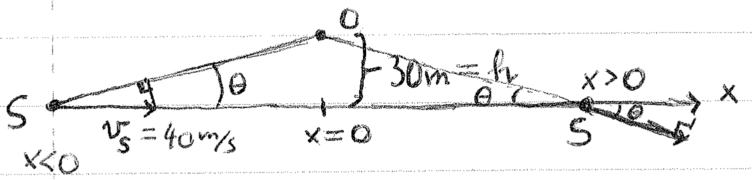
$$\nu_2 = \frac{v}{v - v_s}\nu_0 = 680\,Hz \quad \text{(se Eks 1)}$$

Sjåføren måler reflektert bølge med frekvens

$$\nu_3 = \frac{v + v_s}{v}\nu_2 = \frac{380}{340}\cdot 680\,Hz = \underline{760\,Hz}$$

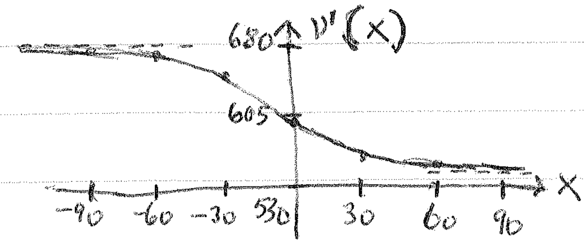
[Kommentar: Har her en dobbel dopplereffekt, alltid med $\nu_2 - \nu_0 = \nu_3 - \nu_2$]

Eks 3: Bilen fra Eks 1 passerer 30 m fra observatøren. Finn observert frekvens som funksjon av x.



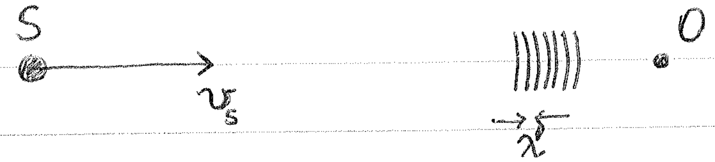
Hastighet mot O: $v_s \cos\theta$,

$\cos\theta = -x/\sqrt{x^2+h^2}$



$$\Rightarrow \nu(x) = \frac{v\cdot\nu_0}{v + v_s x/\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{600\,Hz}{1 + 2x/17\sqrt{x^2+900}}$$

Sjokkbølger (LL 10.8, TM 15.5)



$v_s \to v \Rightarrow \lambda' = (v - v_s)T \to 0$

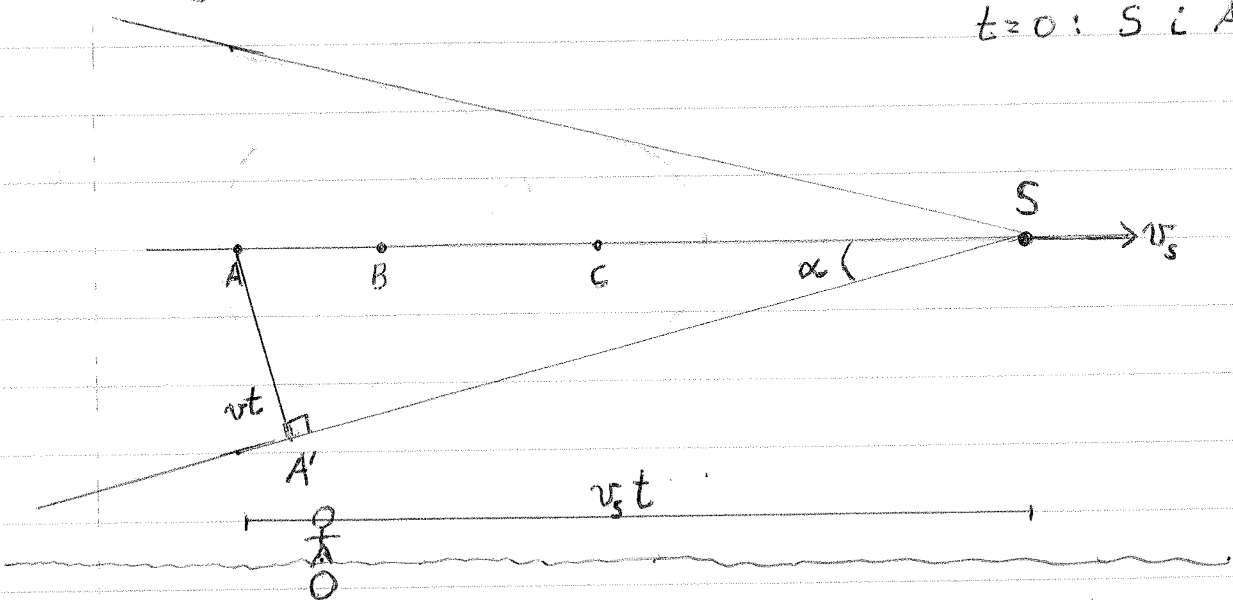
$\Rightarrow \nu' \to \infty$

$\Rightarrow \bar{P} \sim (\omega')^2 \sim (\nu')^2 \to \infty$ ($\bar{P}$ = bølgens midlere effekt)

dvs: krever mye energi å nærme seg og bryte lydmuren ($v_s \geq v$)

Overlydsobjekt (f.eks. fly, geværkule):

$t = 0$: S i A



alle lydbølgene inne i kjeglen med "toppvinkel" 2α, bestemt ved

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_s}$$

På linjen A'S: størst tetthet av bølgefronter, høy energi, ankommer observatør O uten forvarsel, dvs sjokkbølge!

Mach-tallet : $M = \frac{v_s}{v}$ (E. Mach, 1838-1916, Østerrike)

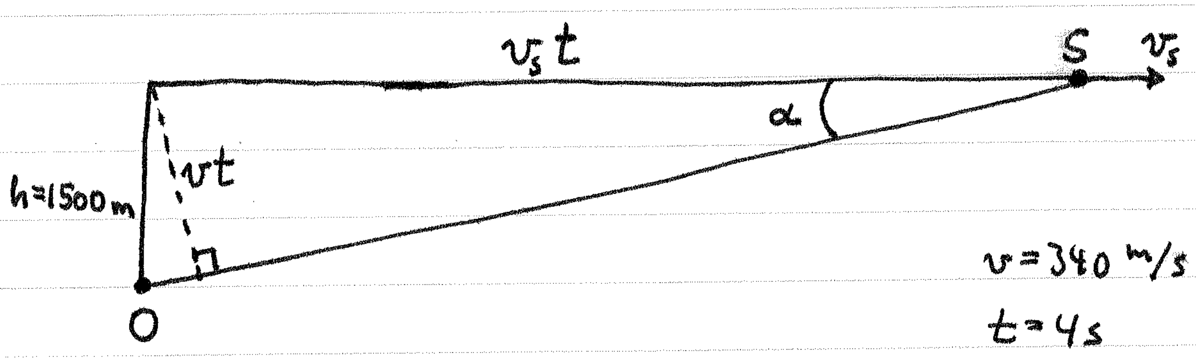
(Kompresjonen av mediet)
Merk: • Bevegelsen i mediet skaper sjokkbølgen, eventuell lydkilde inne i S er typisk uten betydning.

Hit 2.10.06

• Kan også få sjokkbølger på vannoverflaten etter båt med fart > overflatebølgenes fart.

(ikke tatt 2.10.06)

Eksempel: Jagerfly i 1500 meters høyde, flyr horisontalt. Du hører sjokkbølgen 4 sek. etter at flyet passerte rett over deg. Bestem flyets machtall $M = v_s / v$.



$v = 340$ m/s

$t = 4$ s

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_s} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + v_s^2 t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (v_s t/h)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2 (vt/h)^2}}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad M = \frac{1}{\sqrt{1 - (vt/h)^2}} \approx \underline{\underline{2.37}}$$

$$(\Rightarrow \alpha \approx 25^\circ)$$

Svevning. Gruppehastighet

Ser på superposisjon av to bølger (f.eks. lyd) med lik amplitude og fasekonstant ($\varphi = 0$), men med litt ulik frekvens:

$$\xi_1(x,t) = \xi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\xi_2(x,t) = \xi_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t) \qquad \omega_2 > \omega_1 \; ; \; k_2 > k_1$$

Total bølge: $\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$

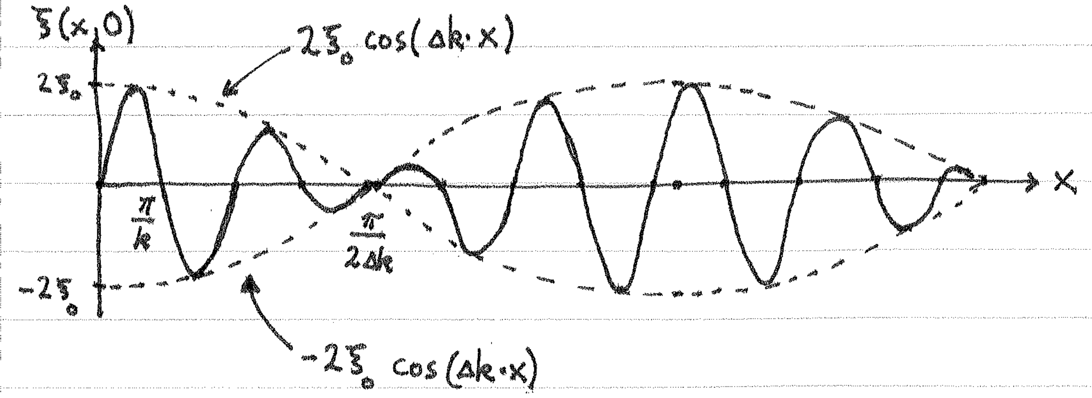
Identitet: $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$

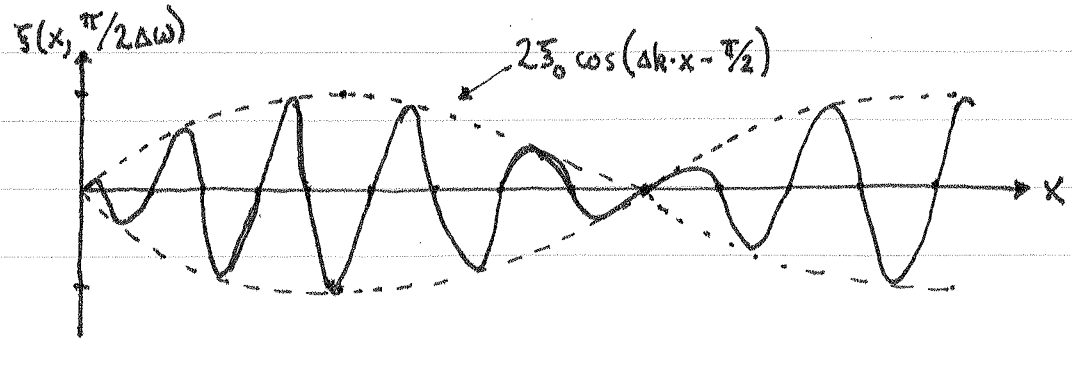
$$\Rightarrow \xi(x,t) = 2\xi_0 \sin\left(\frac{k_1+k_2}{2} x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_2-k_1}{2} x - \frac{\omega_2-\omega_1}{2} t\right)$$

$$= 2\xi_0 \sin(kx - \omega t) \cos(\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t)$$

der $k \equiv \frac{k_1+k_2}{2}$, $\omega \equiv \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, $\Delta k \equiv \frac{k_2-k_1}{2}$, $\Delta\omega \equiv \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$

$(\Delta k \ll k)$ $\qquad (\Delta\omega \ll \omega)$





$\xi(x,t)$ = raskt varierende "bærebølge" $\sin(kx-\omega t)$
<u>modulert</u> med langsomt varierende
"modulasjonsbølge" $\cos(\Delta k\cdot x - \Delta\omega\cdot t)$

Hastigheter:

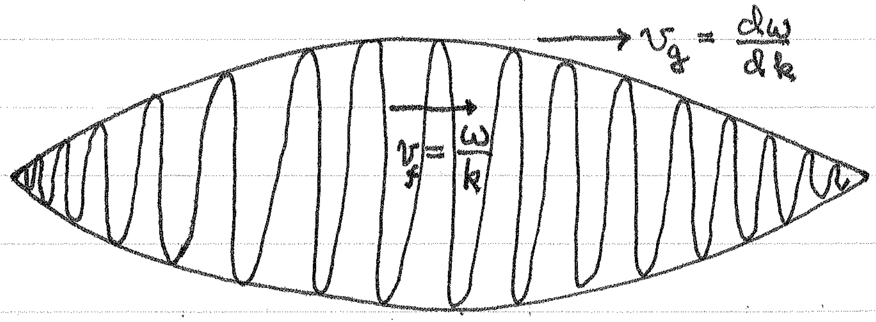
Bærebølgen: $\sin(kx-\omega t) = \sin k(x-\frac{\omega}{k}t) \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = v_f$

Modulasjonsbølgen: $\cos(\Delta k\cdot x - \Delta\omega\cdot t) = \cos \Delta k(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t) \Rightarrow v = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

Dersom Δk og $\Delta\omega$ er "små": $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}$

(Digresjon...!) <u>Gruppehastighet</u>: $\boxed{v_g \equiv \frac{d\omega}{dk}}$

dvs: modulasjonsbølgen forplanter seg med gruppehastigheten:



<u>Uten</u> dispersjon (f.eks. lyd) er $\omega(k) = v_f \cdot k \Rightarrow v_g = v_f$
(med <u>konstant</u> v_f)

<u>Med</u> dispersjon er $\omega(k)$ <u>ikke</u> en lineær funksjon $\Rightarrow v_g \neq v_f$

Eks: Overflatebølger på (dypt) vann: $v_f = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}}$ (der g = tyngdens akselerasjon, ρ = vannets massetetthet, γ = overflatespenning (N/m))

Dermed: $\omega(k) = v_f \cdot k = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$

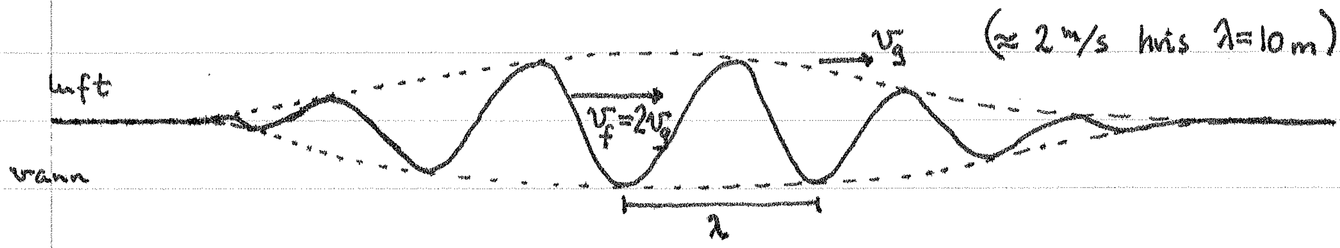
som gir

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + 3\gamma k^2/\rho}{2\sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}} \neq v_f$$

Lange bølgelengder ($gk \gg \gamma k^3/\rho$, dvs $\lambda \gg 2\pi\sqrt{\gamma/\rho g} \approx 1.7$ cm for luft/vann grenseflate, der $\gamma \approx 72.7$ mN/m) : $\omega \approx \sqrt{gk}$

$$\Rightarrow \quad v_f \approx \sqrt{g/k}$$

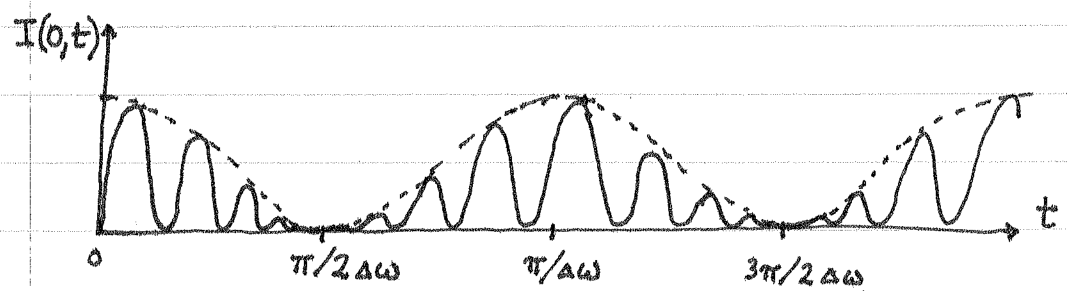
$$v_g \approx \frac{1}{2}\sqrt{g/k} = \frac{1}{2} v_f$$



⇒ en bølgetopp $\overset{\text{dannes}}{\text{bak}}$ i bølgetoget spaserer gjennom bølgetoget, først med økende amplitude, deretter med avtagende amplitude, før den "dør ut" fremst i bølgetoget

~ · ~

Tilbake til "de to harmoniske", $\xi(x,t) = 2\xi_0 \sin(kx - \omega t)\cos(\Delta k x - \Delta\omega t)$.
Intensiteten: $I \sim |\xi|^2 \sim \cos^2(\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t)$



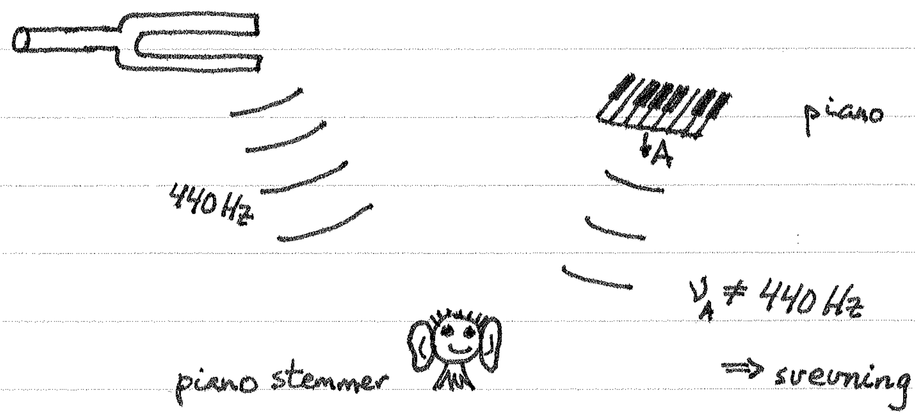
⇒ vi hører max lyd periodevis, med periode $T_s = \frac{\pi}{\Delta\omega}$, vi har svevning med svevefrekvens $\nu_s = \Delta\omega/\pi = (\omega_2 - \omega_1)/2\pi$
$= \nu_2 - \nu_1$

- svevning er en følsom metode for måling av små frekvensforskjeller

- svevning fås for alle typer bølger, også lys

Eksempel:

- stemming av instrumenter (stemmegaffel gir referansefrekvens)



svevning $\Rightarrow \nu_A \neq 440$ Hz

stramming av strengen

$\Rightarrow$ 1) større svevefrekvens ν_s : $\nu_A > 440 \Rightarrow$ må slakke strengen

2) mindre —— " —— : $\nu_A < 440$, strammer strengen inntil $\nu_s = 440 - \nu_A \approx 0$