9.10.06

Elektromagnetiske bølger (LHL 28, TM 30)

Vi skal vise at Maxwells ligninger gir bølgeligning for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i vakuum. Plan:

1. Kontinuitetsligningen
Krav om ladningsbevarelse ⇒ Amperes lov ikke helt korrekt

2. Ampere – Maxwells lov (LHL 23.8, TM 30.1)
Maxwells korreksjon av Amperes lov

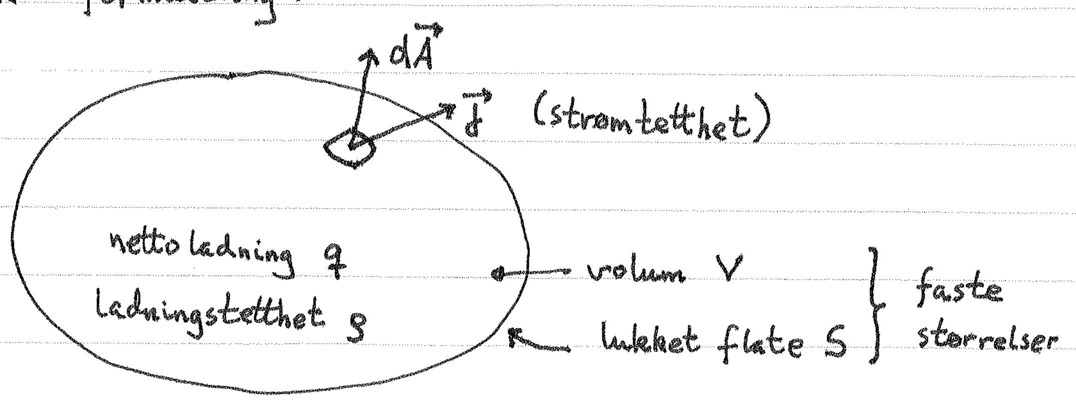
3. Maxwells ligninger på differensialform (LHL 28.1)
Divergensteoremet. Stokes' teorem.

4. Bølgeligning for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i vakuum. (LHL 28.3, TM 30.4)
Utledning fra Maxwells ligninger

1. Kontinuitetsligningen

$\boxed{\text{Elektrisk ladning er bevart}}$ (Empirisk lov)

Matematisk formulering:



Netto ladning i V: $q = \int_V dq = \int_V \rho \, dV$

Netto strøm gjennom S: $I = \oint_S dI = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A}$

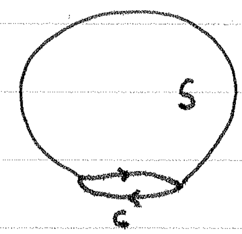
($I > 0$ betyr netto strøm <u>ut av</u> V)

Ladningsbevarelse $\Rightarrow$ $I = \underbrace{-\frac{dq}{dt}}_{\text{netto reduksjon i } q \text{ pr tidsenhet}}$

netto strøm <u>ut</u> av V

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dq}{dt} + I = 0}$$ Kontinuitetslign. (på integralform)

Amperes lov:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Dersom S $\rightarrow$ <u>lukket</u> flate, vil lengden av kurven c $\rightarrow 0$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \rightarrow 0 \qquad \Rightarrow I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A} \rightarrow 0$$

Altså:

Amperes lov $\Rightarrow$ $I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0$

Kont. lign $\Rightarrow$ $I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV$

Konflikt dersom $\frac{dq}{dt} \neq 0$

2. Ampere - Maxwells lov

Gauss' lov: $q = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Maxwell foreslo derfor å korrigere Amperes lov,

$$I \longrightarrow I + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{"forskyvningsstrøm"}}$$

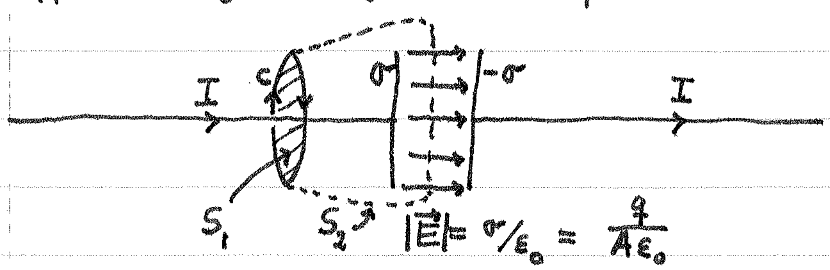
altså:

$$\boxed{\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$ Ampere - Maxwells lov

Dette gir konsistens med kontinuitetsligningen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Lukket flate } S \quad \Rightarrow \quad \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \text{og} \quad \mu_0 \left\{ I + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \right\} = \mu_0 \left\{ I + \frac{dq}{dt} \right\} = 0 \end{array}\right\} \text{OK!}$$

Oppklarer også følgende eksempel:



$|\vec{E}| = \sigma/\varepsilon_0 = \frac{q}{A\varepsilon_0}$

$$\left.\begin{array}{l} \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{(1)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{=0} = \mu_0 I \\ \text{og} \quad \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{I_{(2)}}_{=0} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{dt} = \mu_0 I \end{array}\right\} \text{OK!}$$

3. Maxwells ligninger på differensialform

Integralform:

Gauss: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = q/\varepsilon_0$ (lukket flate S)

Faraday-Henry: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}$ (åpen —"—)

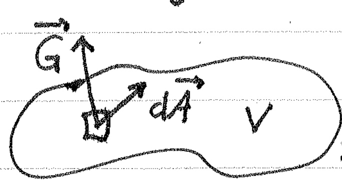
Gauss: $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$ (lukket —"—)

Ampere-Maxwell: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}$ (åpen —"—)

"Kilder":

$$q = \int_V \rho\, dV \qquad I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

Divergensteoremet: $\oint_S \vec{G}\cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla\cdot\vec{G})\, dV$



$$\nabla\cdot\vec{G} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(G_x\hat{x} + G_y\hat{y} + G_z\hat{z}\right)$$

$$= \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$ = divergensen til $\vec{G}$ (i kartesiske koordinater)

$\nabla\cdot\vec{G}$ er en <u>skalar</u>

Dermed :

$$\left.\begin{array}{ccc} \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} & = & \int_V (\nabla\cdot\vec{E})\,dV \\ \text{Gauss' } \| \text{ lov} & & \| \\ \frac{1}{\varepsilon_0} q & = & \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0}$$

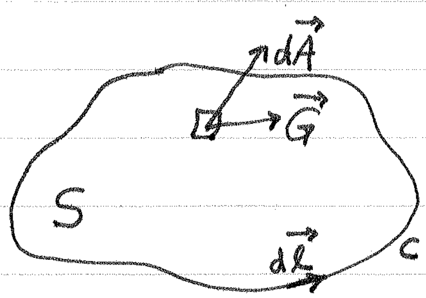
Gauss' lov på differensialform

Merk: <u>Integrandene</u> må være like overalt (ikke bare integralene) fordi S og V er vilkårlige

Videre:

$$\left.\begin{array}{ccc} \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} & = & \int_V (\nabla\cdot\vec{B})\,dV \\ \text{Gauss' } \| \text{ lov} & & \| \\ 0 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$$

Stokes' teorem : $\oint_C \vec{G}\cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla\times\vec{G})\cdot d\vec{A}$



$$\nabla\times\vec{G} = \hat{x}\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)$$

$= \text{curl til } \vec{G}$

$\nabla\times\vec{G}$ er en <u>vektor</u>

Dermed: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{A}$

Faradays/Henrys lov $\parallel$

$-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} \underset{S}{\overset{\text{fast}}{=}} -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A}$

$\Rightarrow \boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$

(Igjen: Vilkårlig c, S $\Rightarrow$ integrandene like overalt)

Videre: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{A}$

Ampere $\parallel$ Maxwell $\parallel$

$\mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \mu_0\int_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{A}$

$\Rightarrow \boxed{\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

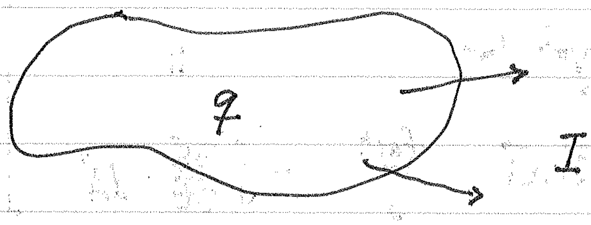
Oppsummering:

$$\boxed{\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{E} &= \rho/\varepsilon_0 \\
\nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\vec{B} &= 0 \\
\nabla\times\vec{B} &= \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}}$$

Maxwells ligninger på differensialform

74B

Kontinuitetsligningen på differensialform:



$$\boxed{I + dq/dt = 0}$$ integralform

$$I = \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla\cdot\vec{j})\, dV$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV \underset{\text{volum } V}{\overset{\text{fast}}{=}} \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$ differensialform

t 9.10.06

11.10.06

4. Bølgeligning for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i vakuum

Vakuum: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Matematisk identitet: $\nabla \times \nabla \times \vec{G} = \nabla(\nabla \cdot \vec{G}) - \nabla^2 \vec{G}$

der

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \vec{G})\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \vec{G})\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \vec{G})\hat{z}$$

og

NB!

$$\nabla^2 \vec{G} = \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial z^2}$$

Siden $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$ i vakuum:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}, \qquad \nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

Faraday ‖ Henry

$$-\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \overset{\text{Ampere}}{\underset{\text{Maxwell}}{=}} -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ampere ‖ Maxwell

$$\mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}) \overset{\text{Faraday}}{\underset{\text{Henry}}{=}} -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \qquad \boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

Som er bølgeligninger for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ (i tre romlige dimensjoner).

Bølgehastighet: $v = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \approx 3 \cdot 10^8$ m/s $= c =$ lyshastigheten i vakuum

Eksempel: Harmonisk plan bølge.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_E)$$

og

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_B)$$

dvs plane bølger som forplanter seg i retning $\vec{k}$, med

$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$, er mulige løsninger av bølgeligningene.

NB! Må også oppfylle Maxwells ligninger:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\vec{E}_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_E)$$

$$= -\vec{E}_0 (k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}) \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_E)$$

$$= -\vec{k}\cdot\vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_E)$$

$$= 0 \qquad \text{(vakuum!)}$$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k} \perp \vec{E}}$$

dvs $\vec{E} \perp$ forplantningsretningen

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t)$ er en <u>transversal</u> bølge

Tilsvarende: $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{k} \perp \vec{B}}$

$\Rightarrow$ $\vec{B}(\vec{r},t)$ er også <u>transversal</u> bølge

Videre: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_E) \times \vec{E}_0$$

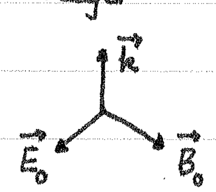
$$= -\left(k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}\right) \times \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_E)$$

$$= -\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_E)$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{B}_0 \frac{\partial}{\partial t}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_B)$$

$$= -\omega \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_B)$$

Velger



$\Rightarrow$ retningen til $\vec{k} \times \vec{E}_0$ $= (\pm)$ retningen til $\vec{B}_0$

$\Rightarrow$ $\vec{B}_0 \perp \vec{E}_0$ og $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$

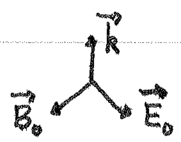
$\Rightarrow$ $\vec{B} \perp \vec{E}$ og $\vec{B} \perp \vec{k}$ og (fra før) $\vec{E} \perp \vec{k}$

Kan skrive $\vec{k} \times \vec{E}_0 = k \cdot E_0 \cdot \hat{B}_0 = k E_0 \frac{\vec{B}_0}{B_0}$

$$\Rightarrow k E_0 \frac{\vec{B}_0}{B_0} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_E) = \omega \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_B)$$

Oppfylt for alle $\vec{r}$ og t kun dersom $\varphi_E = \varphi_B$

(Valget



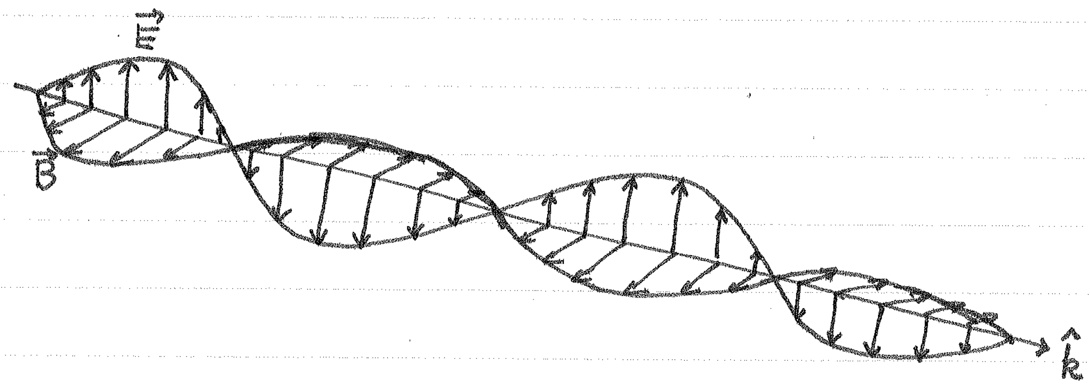
gir $\varphi_E = \varphi_B + \pi$)

Dermed: $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$

eller $\boxed{\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}}$

For tallverdiene: $\boxed{E = \frac{\omega}{k} B = c B}$

(Har brukt 3 av 4 maxwell-ligninger, hva med $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$?
Gir $\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \omega \vec{E}$, som er identisk med $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$
når $\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{B}$)



Hit 11.10.06

- Superposisjonsprinsippet: $\vec{E}_1$ og $\vec{E}_2$ løsn. av bølgelign.
  $\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ også løsning
  Tilsvarende for $\vec{B}$.

- Generelle løsninger: $\vec{E} = \vec{E}_1(x - ct) + \vec{E}_2(x + ct)$
  (Bølge langs x)
  $\vec{B} = \vec{B}_1(x - ct) + \vec{B}_2(x + ct)$

- $\vec{E}$ og $\vec{B}$ må tilfredsstille visse grensebetingelser (f.eks i overgang mellom to ulike medier) gitt av Maxwells ligninger:

$\Delta E_t = 0$ og $\Delta B_n = 0$, dvs kontinuerlig tangentialkomponent av $\vec{E}$ og kontinuerlig normalkomponent av $\vec{B}$