Hver oppgave teller 2.5%

1) Hva er bølgelengden til et foton med energi 100 eV?

A) 0.12 nm B) 12 nm C) 0.12 μm D) 12 μm E) 0.12 mm

2) Hva er de Broglie–bølgelengden til et fritt elektron med kinetisk energi 100 eV?

A) 0.12 nm B) 12 nm C) 0.12 μm D) 12 μm E) 0.12 mm

3) I 2003 viste Nairz, Arndt og Zeilinger (Am. J. Phys. **71**, 319-325 (2003)) at "fotballmolekylene" C_{60} har bølgeegenskaper. Hva er de Broglie–bølgelengden til slike molekyler når de har hastighet 117 m/s? Hvert karbonatom har masse 12u (6 protoner og 6 nøytroner i kjernen).

A) 4.7 fm B) 4.7 pm C) 4.7 nm D) 4.7 μm E) 4.7 mm

4) Ved termisk likevekt vil atomene i en enatomig gass ha en gjennomsnittlig kinetisk energi $\frac{1}{2}k_BT$ pr frihetsgrad, dvs $\frac{3}{2}k_BT$ pr atom. Når nøytroner bremses opp i en såkalt moderator i en kjernereaktor, ender de opp som "termiske" nøytroner, i likevekt med omgivelsene, dvs med en gjennomsnittlig kinetisk energi $\frac{3}{2}k_BT$. Anta $T = 300$ K. Hva er de Broglie–bølgelengden til slike nøytroner?

A) 1.45 fm B) 1.45 pm C) 1.45 Å D) 1.45 nm E) 1.45 μm

5) Frigjøringsarbeidet til gull er 4.8 eV. Hvilke foton–bølgelengder λ vil da gi fotoelektrisk effekt i gull?

A) $\lambda < 658$ nm B) $\lambda > 558$ nm C) $\lambda < 458$ nm D) $\lambda > 358$ nm E) $\lambda < 258$ nm

En partikkel med masse m befinner seg i potensialet $V(x) = m\omega^2x^2/2$ (dvs en endimensjonal harmonisk oscillator). Energiegenfunksjoner $\psi_n(x)$ og tilhørende energiegenverdier E_n er oppgitt i formelarket. Oppgavene 6 – 8 omhandler dette systemet.

6) Hva er det klassisk forbudte området når partikkelen befinner seg i første eksiterte tilstand?

A) $|x| > \sqrt{\omega/3\hbar}$ B) $|x| < \sqrt{3m\omega/\hbar}$ C) $|x| > \sqrt{3m\omega/\hbar}$
D) $|x| < \sqrt{3\hbar/m\omega}$ E) $|x| > \sqrt{3\hbar/m\omega}$

7) Anta at partikkelen befinner seg i (den normerte men ikke–stasjonære) tilstanden

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{3} c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

med $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 1/2$. Hva er nå forventningsverdien $\langle E \rangle$ av partikkelens energi?

A) $\langle E \rangle = \hbar\omega$ B) $\langle E \rangle = 2\hbar\omega$ C) $\langle E \rangle = 3\hbar\omega$ D) $\langle E \rangle = 4\hbar\omega$ E) $\langle E \rangle = 5\hbar\omega$

8) Hva er ikke en mulig måling av partikkelens energi?

A) $\hbar\omega/2$ B) $3\hbar\omega/2$ C) $5\hbar\omega/2$ D) $7\hbar\omega/2$ E) $4\hbar\omega$

9) En partikkel med masse m befinner seg i bokspotensialet $V(x) = 0$ for $0 < x < L$, $V(x) = \infty$ ellers. Energiegenfunksjoner $\psi_n(x)$ og tilhørende energiegenverdier E_n er oppgitt i formelarket. Anta at partikkelen befinner seg i (den normerte men ikke–stasjonære) tilstanden

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{2} c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

med $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$. Sannsynlighetstettheten $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ vil da variere harmonisk med tiden. Hva er perioden T for ρ?

A) $T = mL^2/3\pi\hbar$ B) $T = 2mL^2/3\pi\hbar$ C) $T = mL^2/\pi\hbar$
D) $T = 4mL^2/3\pi\hbar$ E) $T = 5mL^2/3\pi\hbar$

10) Energinivåene for en partikkel med masse m i en todimensjonal kvadratisk boks med sidekanter L er

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right),$$

med positive heltallige kvantetall n_x, n_y. Hva er degenerasjonsgraden til energinivået $9\hbar^2\pi^2/mL^2$?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

11) Hva er kommutatoren $[z, \widehat{p}_z]$?

A) 0 B) $i\hbar$ C) $i\hbar x$ D) $i\hbar y$ E) $i\hbar z$

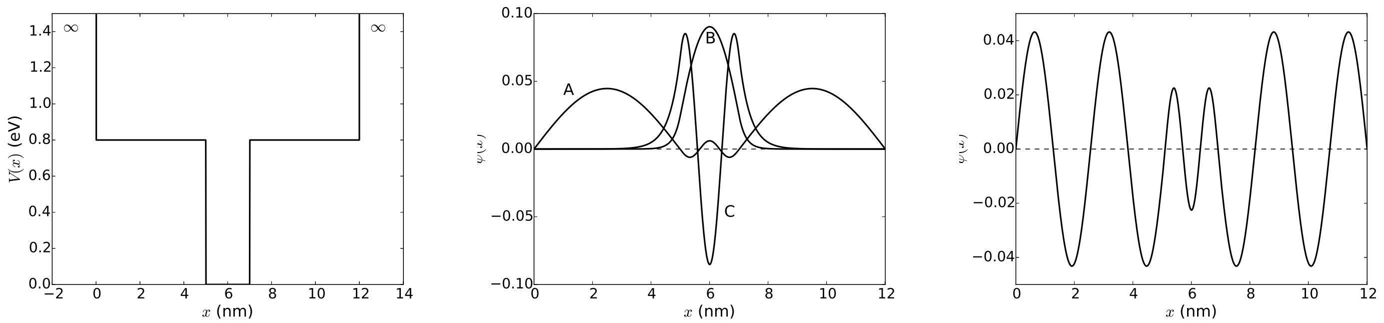
12) Hva er kommutatoren $[z, \widehat{L}_z]$?

A) 0 B) $i\hbar$ C) $i\hbar x$ D) $i\hbar y$ E) $i\hbar z$

13) Funksjonen $\psi(x, y, z) = \cos kx \cos kz \cos ky$ er en egenfunksjon til hamiltonoperatoren $\widehat{H}$ for en partikkel med masse m. Anta at $V = 0$. Hva er da den tilhørende energiegenverdien?

A) $\hbar^2 k^2/2m$ B) $\hbar^2 k^2/m$ C) $3\hbar^2 k^2/2m$ D) $2\hbar^2 k^2/m$ E) $5\hbar^2 k^2/2m$

Du har vært på laben og produsert en lagdelt halvlederstruktur som gir opphav til et endimensjonalt potensial for elektroner i dette systemet (figuren til venstre), $V(x) = V_0 = 0.80$ eV for $0 < x < 5$ og $7 < x < 12$ nm; $V(x) = 0$ for $5 < x < 7$ nm; $V(x) \simeq \infty$ ellers. Vi skal i oppgavene 14 – 16 se nærmere på noen energiegentilstander for et elektron i dette potensialet.



14) Figuren i midten viser tre energiegentilstander, merket A, B og C. (Den stiplete linjen angir rett og slett x-aksen.) Ranger disse tilstandene, fra lavest til høyest energi.

A) A, B, C B) C, A, B C) B, C, A D) B, A, C E) C, B, A

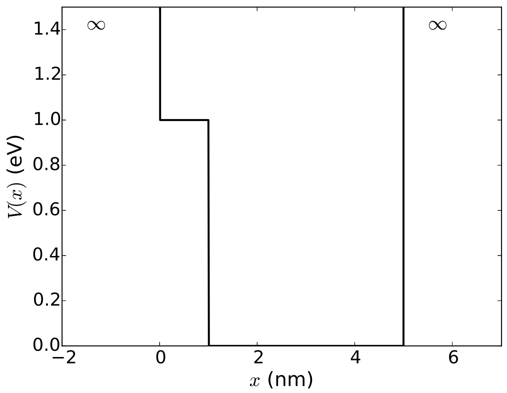
15) Hva kan du si om energien E_A i tilstand A?

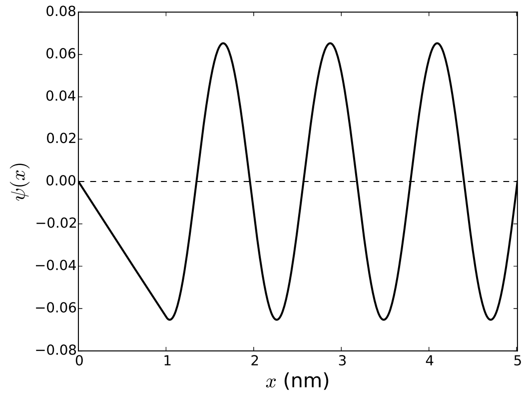
A) Litt større enn V_0 B) Litt mindre enn V_0
C) Mye større enn V_0 D) Mye mindre enn V_0 E) $E_A = 0$

16) Hva er et fornuftig estimat av energien i tilstanden i figuren til høyre?

A) $1.3V_0$ B) $3.5V_0$ C) $5.7V_0$ D) $7.9V_0$ E) $9.1V_0$

Oppgavene 17 og 18 handler om det endimensjonale potensialet i figuren nedenfor, til venstre: $V(x) = 1.0$ eV for $0 < x < 1.0$ nm og $V(x) = 0$ for $1.0 < x < 5.0$ nm; $V(x) \simeq \infty$ ellers.





17) Hvor mange tilstander har lavere energi enn tilstanden $\psi(x)$ i figuren til høyre? (Stiplet linje angir x-aksen.)

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

18) Hva er energien til et elektron som befinner seg i tilstanden $\psi(x)$ i figuren til høyre?

A) ca 0.1 eV B) ca 1.0 eV C) ca 2.0 eV D) ca 3.0 eV E) ca 4.0 eV

En av tilstandene (den såkalte 2s-tilstanden) i hydrogenatomet er $\psi_{200} = Y_{00}\, R_{20}$. (Se formelarket.) Oppgavene 19 – 21 dreier seg om denne tilstanden.

19) Hva er den klassiske venderadien (dvs ytre grense for det klassisk tillatte området)?

A) a_0 B) $2a_0$ C) $4a_0$ D) $8a_0$ E) $16a_0$

20) Hvor er sannsynlighetstettheten $\rho_{200} = |\psi_{200}|^2$ størst?

A) i $r = a_0$ B) i $r = 2a_0$ C) i $r = 4a_0$ D) i $r = 8a_0$ E) i $r = 16a_0$

21) Hvor i det klassisk tillatte området er sannsynlighetstettheten ρ_{200} lik null?

A) i $r = a_0$ B) i $r = 2a_0$ C) i $r = 4a_0$ D) i $r = 8a_0$ E) i $r = 16a_0$

Den isotrope todimensjonale harmoniske oscillatoren,

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = V(r),$$

har energiegentilstander på produktform, $\psi_{n_x n_y} \equiv (n_x\, n_y) = \psi_{n_x}(x)\,\psi_{n_y}(y)$, der $\psi_{n_x}(x)$ og $\psi_{n_y}(y)$ er energiegentilstander til den tilsvarende endimensjonale harmoniske oscillatoren (se formelark). Oppgavene 22 – 24 dreier seg om denne isotrope harmoniske oscillatoren i to dimensjoner.

22) Hvor mange forskjellige slike (romlige) energiegentilstander $(n_x\, n_y)$ har vi med energi $E \leq 5\hbar\omega$?

A) 5 B) 15 C) 25 D) 35 E) 45

23) I hvilke posisjoner på y-aksen er $\rho_{03} = 0$?

A) $\pm\sqrt{2\hbar/5m\omega}$ B) $\pm\sqrt{3\hbar/5m\omega}$ C) $0, \pm\sqrt{\hbar/2m\omega}$
D) $0, \pm\sqrt{3\hbar/2m\omega}$ E) $0, \pm\sqrt{5\hbar/2m\omega}$

24) Hva blir systemets totale energi dersom det inneholder 6 ikke–vekselvirkende elektroner? Anta lav temperatur, slik at elektronene inntar tilstander som resulterer i lavest mulig total energi. Husk at *en* romlig tilstand gir opphav til *to* ulike tilstander, siden et elektron har to mulige spinntilstander, ”opp” eller ”ned”. Husk også Pauliprinsippet.

A) $5\hbar\omega$ B) $10\hbar\omega$ C) $15\hbar\omega$ D) $20\hbar\omega$ E) $25\hbar\omega$

25) Ikke–vekselvirkende elektroner som avgrenses til en kvadratisk todimensjonal ”boks” (flate) med sidekanter $L = 200$ nm har mulige energinivåer $E = (n_x^2 + n_y^2)\pi^2\hbar^2/2m_e L^2$, med $n_x \geq 1$ og $n_y \geq 1$. Anta at du har en slik todimensjonal elektrongass med tetthet 10^{11} pr cm^2. Hva er da omtrent energien E_F til elektronet med høyest energi (Fermienergien)? Anta lav temperatur, slik at elektronene inntar tilstander som resulterer i lavest mulig total energi. Husk at *en* romlig tilstand gir opphav til *to* ulike tilstander, siden et elektron har to mulige spinntilstander, ”opp” eller ”ned”. Husk også Pauliprinsippet.

A) ca 2 μeV B) ca 0.2 meV C) ca 0.2 eV D) ca 2 eV E) ca 20 eV

26) En klassisk stiv rotator har (kinetisk) energi $K = \boldsymbol{L}^2/2I$. Her er $\boldsymbol{L}$ dreieimpulsen (se formelvedlegg) og $I = \sum_j m_j r_j^2$ treghetsmomentet (relativt en akse gjennom massesenteret). Klormolekylet Cl_2 har bindingslengde $d = 0.20$ nm og masse $2m_{\text{Cl}} = 70.9u$. Hva er energidifferansen mellom laveste og nest laveste rotasjonstilstand for Cl_2 (når vi betrakter molekylet som en stiv rotator)?

A) 19 μeV B) 39 μeV C) 59 μeV D) 79 μeV E) 99 μeV

27) Vekselvirkningen mellom de to atomene i klormolekylet beskrives brukbart med Morse–potensialet

$$V_M(x) = V_0 \left(1 - e^{-\kappa(x-d)}\right)^2 .$$

Her angir x avstanden mellom de to atomene, mens V_0, κ og d (bindingslengden) er parametre som kan tilpasses eksperimentelle målinger eller nøyaktige beregninger. For klormolekylet gir verdiene $V_0 = 2.10$ eV og $\kappa = 22.0$ nm^{-1} brukbare resultater. Hva gir denne modellen for energidifferansen mellom klormolekylets vibrasjonstilstander, $\Delta E = \hbar\omega$? (Tips: Anta små utsving fra likevekt og et tilnærmet harmonisk potensial. Når $|x| \ll 1$ er $\exp(x) \simeq 1 + x$.)

A) 9 meV B) 29 meV C) 49 meV D) 69 meV E) 89 meV

En kjemisk reaksjon kan modelleres med energifunksjonen

$$E(x) = E_0 \cos(x) \exp(-x/5).$$

Her er $E_0 = 500$ meV, mens x er en dimensjonsløs reaksjonskoordinat, med $1 < x < 11$. Anta at reaksjonen starter i et lokalt energiminimum og går via en transisjonstilstand (dvs et lokalt energimaksimum) til et globalt energiminimum. Oppgavene 28 – 30 dreier seg om denne reaksjonsmodellen.

28) Hva er omtrentlig verdien av x i reaksjonens transisjonstilstand?

A) $x_{\text{TS}} = 2.9$ B) $x_{\text{TS}} = 4.4$ C) $x_{\text{TS}} = 6.1$ D) $x_{\text{TS}} = 7.5$ E) $x_{\text{TS}} = 9.2$

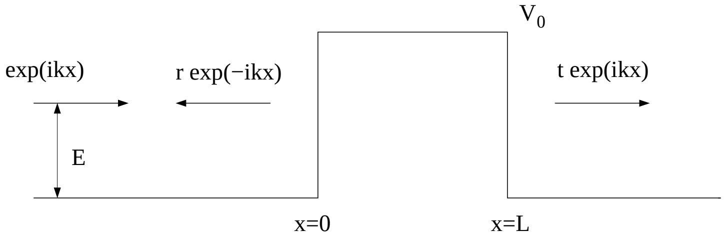
29) Hva er reaksjonens aktiveringsenergi? (Dvs, forskjellen mellom transisjonstilstandens energi og energien i begynnelsestilstanden.)

A) 111 meV B) 222 meV C) 333 meV D) 444 meV E) 555 meV

30) Hvor mye energi frigjøres (som varme) i reaksjonen? (Dvs, hva er energiforskjellen mellom begynnelses- og slutt-tilstanden?)

A) 195 meV B) 295 meV C) 395 meV D) 495 meV E) 595 meV

Potensialbarrieren i figuren nedenfor, med høyde V_0 og bredde L, kan realiseres i en lagdelt halvlederstruktur. Oppgavene 31 – 38 er knyttet til spredning av elektroner mot en slik potensialbarriere.



Vi ser på en stasjonær situasjon, der sannsynlighetsstrømmen ikke endrer seg med tiden. Et elektron (masse m_e) kommer inn fra venstre med veldefinert impuls og beskrives med den plane bølgen $\psi_i(x) = \exp(ikx)$. Når elektronet treffer barrieren, er det en viss sannsynlighet for at det reflekteres og en (resterende) sannsynlighet for at det transmitteres. Vi antar elastiske kollisjoner, slik at et reflektert elektron kan beskrives med $\psi_r(x) = r\ \exp(-ikx)$ mens et transmittert elektron kan beskrives med $\psi_t(x) = t\ \exp(ikx)$.

31) Hva er energien til det innkommende elektronet når bølgetallet k har verdien 1.26 nm^{-1}?

A) 15 meV B) 60 meV C) 105 meV D) 150 meV E) 195 meV

32) Hva er riktig uttrykk for bølgefunksjonen $\psi_b(x)$ i barriereområdet $0 < x < L$ dersom $E < V_0$? (Her er a og b ubestemte integrasjonskonstanter.)

A) $a \sin(\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x) + b \cos(-\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x)$

B) $a \ln(\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x) + b \ln(-\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x)$

C) $a \tan(\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x) + b \arctan(-\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x)$

D) $a\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x + b/\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x$

E) $a \exp(\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x) + b \exp(-\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}\, x)$

33) Hva er den fysiske betydningen av r og t?

A) r og t er sannsynligheten for hhv refleksjon og transmisjon.
B) $|r|^2$ og $|t|^2$ er sannsynligheten for hhv refleksjon og transmisjon.
C) r og t er sannsynlighetsstrømmen for hhv $x < 0$ og $x > L$.
D) $|r|^2$ og $|t|^2$ er sannsynlighetsstrømmen for hhv $x < 0$ og $x > L$.
E) r er elektronets radius, t er tiden.

34) Hva slags krav må vi stille til bølgefunksjonen $\psi(x)$ i dette problemet?

A) $|\psi|$ må være mindre enn 1 overalt.
B) ψ og ψ' (dvs den deriverte, $d\psi/dx$) må være kontinuerlige overalt.
C) ψ, ψ' og ψ'' må være kontinuerlige overalt.
D) ψ må ha krumning bort fra x-aksen overalt.
E) ψ må ha krumning inn mot x-aksen overalt.

35) Hvis $E \geq V_0$, er transmisjonssannsynligheten

$$T = \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)^2 \sin^2 qL\right]^{-1}.$$

Her er $q = \sqrt{2m_e(E - V_0)}/\hbar$ og $k = \sqrt{2m_e E}/\hbar$. Anta at k har samme verdi som i oppgave 31, og anta at barrierens tykkelse er $L = 4.0$ nm. Hva er da verdien av T når $E = V_0$?

A) 0.14 B) 0.34 C) 0.54 D) 0.74 E) 0.94

36) Hvis $L = 4.0$ nm og $V_0 = 230$ meV, hva er da minste verdi av elektronets energi som gir $T = 1$?

A) 223 meV B) 253 meV C) 283 meV D) 313 meV E) 343 meV

37) Hvis $E < V_0$, er transmisjonssannsynligheten

$$T = \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k}\right)^2 \sinh^2 \kappa L\right]^{-1}.$$

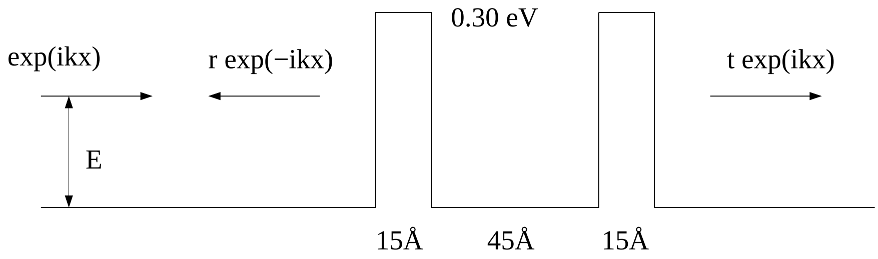
Her er $\kappa = \sqrt{2m_e(V_0 - E)}/\hbar$ og $k = \sqrt{2m_e E}/\hbar$. Når $E \ll V_0$ og $\kappa L \gg 1$, blir $T \ll 1$, og T avtar eksponensielt med barrieretykkelsen L, dvs $T \sim \exp(-L/\xi)$. Anta samme barriere som i oppgave 36, og innkommende elektroner med energi $E = 30$ meV. Hvor stor er da "inntrengningsdybden" ξ?

A) 1.82 nm B) 1.42 nm C) 1.02 nm D) 0.62 nm E) 0.22 nm

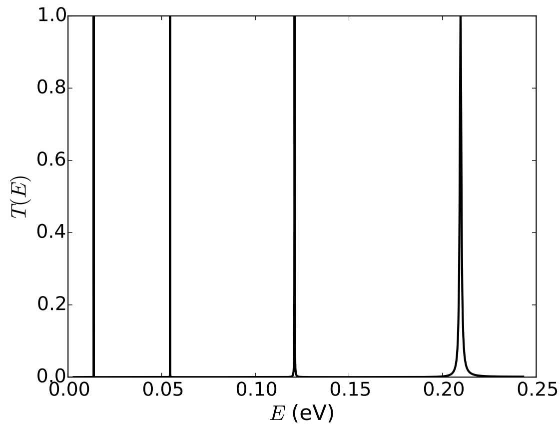
38) Hvis vi lar $L \to 0$ og $V_0 \to \infty$, på en slik måte at produktet $\beta = V_0 L$ er endelig (dvs verken null eller uendelig), får vi en såkalt δ–funksjonsbarriere, $V(x) = \beta\delta(x)$. Uttrykket for T ovenfor reduserer seg til $T = (1 + E_\delta/E)^{-1}$ i denne grensen. Hva er riktig uttrykk for størrelsen E_δ?

A) $E_\delta = \beta/2\hbar$ B) $E_\delta = m_e^2\hbar\beta$ C) $E_\delta = \hbar^2\beta^2$ D) $E_\delta = m_e\beta^2/2\hbar^2$ E) $E_\delta = \hbar/m_e\beta$

Potensialet i figuren nedenfor består av to barrierer med høyde 300 meV og bredde 1.5 nm, adskilt av en "brønn" med bredde 4.5 nm der $V = 0$ (som til høyre og venstre for "dobbelbarrieren").



Transmisjonssannsynligheten $T(E)$ for dette systemet ser slik ut, for innkommende elektroner med energi E mellom 0 og 250 meV:



Med andre ord, potensialbarriere nummer to sørger for at elektroner med bestemte energier *helt sikkert* vil transmitteres.

39) Hva er elektronets bølgelengde ved energi $E = 55$ meV?

A) 2.7 nm B) 3.5 nm C) 5.2 nm D) 7.8 nm E) 10.3 nm

40) Hva er *ikke* et særlig relevant begrep i forbindelse med resultatet i oppgave 39?

A) Resonans. B) Interferens. C) Stående bølger. D) Dissipasjon. E) Tunnelering.