TFY4215 Innføring i kvantefysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Test 4.

Oppgave 1
Diskretisert versjon av TUSL på de to punktene $n = 1$ og $n = 2$ blir

$$\begin{aligned} -\varepsilon(\psi_2 - 2\psi_1) &= E\psi_1 \\ -\varepsilon(\psi_1 - 2\psi_2) &= E\psi_2 \end{aligned}$$

med $\varepsilon \equiv \hbar^2/2m(\Delta x)^2$. Her har vi benyttet grensebetingelsene $\psi_0 = \psi_3 = 0$. Ikke-trivielle ($\psi_n \neq 0$) løsninger bare hvis

$$\begin{vmatrix} 2\varepsilon - E & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 2\varepsilon - E \end{vmatrix} = 0,$$

med løsninger $E = \varepsilon$ og $E = 3\varepsilon$.
Riktig svar: D.

Oppgave 2
Ikke-trivielle løsninger bare hvis

$$\begin{vmatrix} 2\varepsilon - E & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 2\varepsilon - E & -\varepsilon \\ 0 & -\varepsilon & 2\varepsilon - E \end{vmatrix} = 0,$$

med løsninger $E = 2\varepsilon$ og $E = (2 \pm \sqrt{2})\varepsilon$.
Riktig svar: C.

Oppgave 3
Til venstre for potensialspranget er kinetisk energi lik total energi, dvs $E = \hbar^2 k^2/2m$. Til høyre for potensialspranget er kinetisk energi $E - V_0 = \hbar^2 q^2/2m$. Dermed er refleksjonssannsynligheten

$$R = \frac{(\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0})^2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E - V_0})^2},$$

som med $R = 0.1$ gir $E/V_0 \simeq 1.37$.
Riktig svar: B.

Oppgave 4
$N = n_x + n_y$ med mulige kombinasjoner $(n_x, n_y) = (0, N), (1, N-1), \ldots, (N, 0)$, dvs $N + 1$ mulige kombinasjoner.
Riktig svar: D.

Oppgave 5
Vi finner egenfunksjonene $\psi_{n_x}(x)$ og dermed $\psi_{n_y}(y)$ i formelvedlegget. Siden $x = r\cos\phi$ i polarkoordinater, blir $\psi_{10} = R(r)\cos\phi$. Med bevegelse i xy-planet har dreieimpulsen bare en z-komponent, slik at

$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

som gir

$$\widehat{L}^2 \psi_{10} = \hbar^2 \psi_{10},$$

dvs $L^2 = \hbar^2$.
Riktig svar: C.

Oppgave 6
Operatoren $\widehat{L}_z$ inneholder en gangs derivasjon mhp ϕ. Dermed er ψ_{10} ikke egenfunksjon til $\widehat{L}_z$, dvs L_z er

uskarp.
Riktig svar: B.

Oppgave 7
Med $x = r\cos\phi$ og $y = r\sin\phi$ blir $\psi_{11} = f(r)\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}f(r)\sin 2\phi$. Da har vi

$$\langle L_z\rangle = \int \psi_{11}^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\psi_{11} d^2r \sim \int_0^{2\pi} \sin 2\phi \cos 2\phi d\phi = 0.$$

Riktig svar: A.

Oppgave 8
Egenfunksjoner til $\widehat{L}_z$ er $\exp(im\phi)$, med heltallig m. For å oppnå $L_z = \hbar$, må vi ha $m = 1$. Siden $\psi_{10} \sim \cos\phi$ og $\psi_{01} \sim \sin\phi$, må vi velge $\psi_{10} + i\psi_{01}$.
Riktig svar: C.

Oppgave 9
To partikler i ψ_{00}, hver med energi $\hbar\omega/2$, og 3 partikler i ψ_{10} og ψ_{01}, hver med energi $3\hbar\omega/2$. Total energi $11\hbar\omega/2$.
Riktig svar: E.

Oppgave 10
Det er $5! = 120$ ulike permutasjoner av funksjoner på produktform $\psi_1(1)\psi_2(2)\psi_3(3)\psi_4(4)\psi_5(5)$. Et par eksempler: $\psi_1(1)\psi_2(2)\psi_3(3)\psi_4(5)\psi_5(4)$. $\psi_1(2)\psi_2(1)\psi_3(3)\psi_4(4)\psi_5(5)$. Riktig svar: E.