ØVING 5

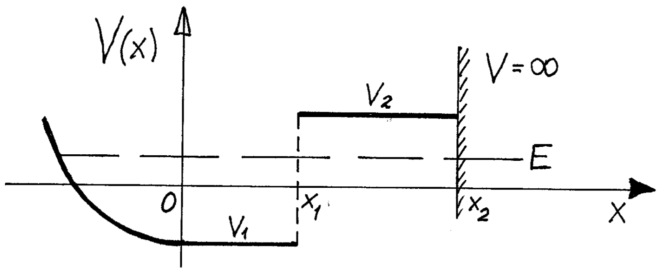
Oppgave 16 Krumning og stykkevis konstante potensialer

I tidligere oppgaver (øving 2 og 3) har vi sett at en energiegenfunksjon, dvs en løsning av Schrödingers tidsuavhengige ligning, $\widehat{H}\psi = E\psi$, eller

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\psi,$$

krummer *mot* aksen i klassisk tillatte områder, og *bort fra* aksen i klassisk forbudte områder (og eventuelt er lineær i områder hvor $V(x) = E$).

a. Noe av barnelærdommen i kvantemekanikk er å vite hvordan dette fungerer for en energiegenfunksjon med energi E når potensialet er **stykkevis konstant**:



Figuren viser et potensial som er stykkevis konstant i områdene $0 < x < x_1$ (hvor $V = V_1$) og $x_1 < x < x_2$ (hvor $V = V_2$). Vi antar at dette systemet har en reell energiegenfunksjon med energien E, slik at $V_1 < E < V_2$. Overbevis deg om at denne i området $o < x < x_1$ må ha hva vi kan kalle **trigonometrisk form**:

$$\psi(x) = A\cos kx + B\sin kx = A'\cos(kx - \alpha), \qquad k = \sqrt{2m(E - V_1)/\hbar^2},$$

slik at løsningen er sinusformet i dette området og krummer raskere mot aksen jo større $E - V_1$ er. (Sammenlign med boks-løsningene i forelesningene og i boka.) (Moral: Den kinetiske energien, $K = E - V_1$, bestemmer bølgetallet og dermed hvor "hurtig" $\psi(x)$ krummer, og omvendt: Krumningen av $\psi(x)$ gir beskjed om $E - V_1$.)

b.[1] Overbevis deg om at løsningen i området $x_1 < x < x_2$ er hva vi kan kalle **hyperbolsk**,

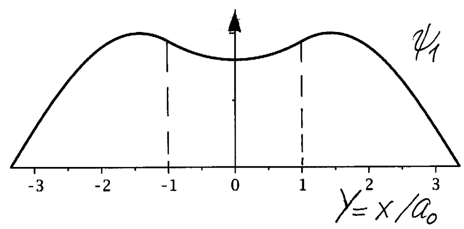
$$\begin{aligned}\psi(x) &= Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}, \qquad \kappa = \sqrt{2m(V_2 - E)/\hbar^2} \\ &= C'\sinh\kappa x + D'\cosh\kappa x,\end{aligned}$$

og krummer raskere bort fra aksen jo større $V_2 - E$ er (jf løsningene for endelig potensialbrønn).
Løsningen i dette området kan i dette tilfellet også skrives på formen $\psi = C'\sinh[\kappa(x - x_2)]$. Forklar hvorfor. [Hint: Skriv løsningen på formen $\psi(x) = C''e^{-\kappa(x-x_2)} + D''e^{\kappa(x-x_2)}$, eller bruk at også $\sinh[\kappa(x-x_2)]$ og $\cosh[\kappa(x-x_2)]$ er to uavhengige løsninger av egenverdiligningen for dette området, i likhet med $e^{\pm\kappa x}$.] Oppgitt: $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$; $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$.

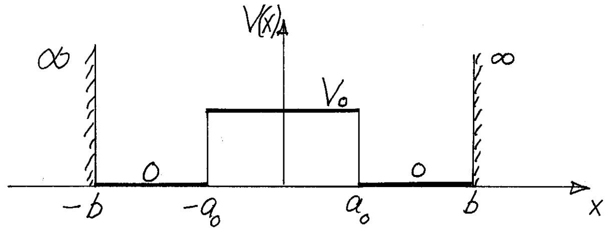
[1] Symbolet κ står for den greske bokstaven "kappa". I dette kurset bruker vi denne når vi har et klassisk forbudt område hvor $E - V$ er en negativ konstant, mens vi i klassisk tillatte områder med $E - V$ lik en positiv konstant bruker bølgetallet k.

c. Anta at potensialet $V(x)$ også er konstant, lik V_3, langt ute til venstre, dvs for $-\infty < x < x_3$ (der x_3 ligger et sted til venstre for den delen av potensialet som er inntegnet ovenfor). Betrakt tilfellene (i) $E < V_3$, (ii) $E > V_3$ og (iii) $E = V_3$, og avgjør for hvert av disse om den aktuelle egenfunksjonen er *kvadratisk integrerbar* — og dermed beskriver hva vi kan kalle en lokalisert og dermed **bunden** tilstand — eller ikke. Hvis egenfunksjonen ikke er kvadratisk integrerbar beskriver den en ikke-lokalisert og dermed **ubunden** tilstand. [Hint: Finn ut hvordan ψ oppfører seg for $-\infty < x < x_3$ for hvert av de tre tilfellene. I tilfelle (iii) kan du se bort fra muligheten for at ψ er lik null for $x < x_3$.]

d.

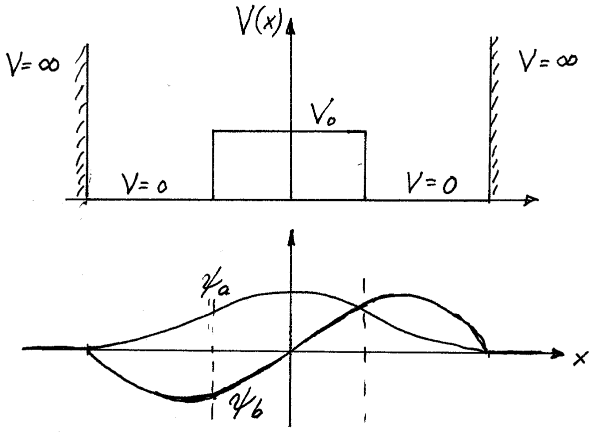


Figuren viser grunntilstanden ψ_1 for potensialet gitt i oppgave 9A:



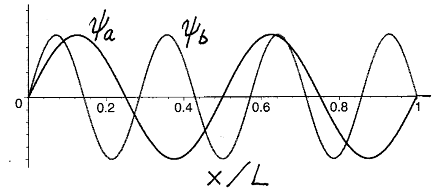
Det opplyses at denne tilstanden har energien $E_1 \approx 0.67\,V_0$. Hva er da formen til ψ_1 i barriereområdet? [Hint: ψ_1 er symmetrisk.]

e. Figuren viser et lignende potensial, samt to funksjoner, ψ_a og ψ_b.



Bare den ene av disse er en energiegenfunksjon for dette potensialet. Studér krumningen og avgjør hvilken av funksjonene dette er. Hvorfor er energien for denne tilstanden høyere enn barrierehøyden V_0? Hvorfor er energien *bare litt* høyere enn V_0? [Hint: Hvilken vei krummer funksjonen i barriereområdet, og krummer den mye eller lite?] Hvorfor kan ikke den andre funksjonen være en energiegentilstand? [Hint: Undersøk om den krummer på en fornuftig måte.]

f.

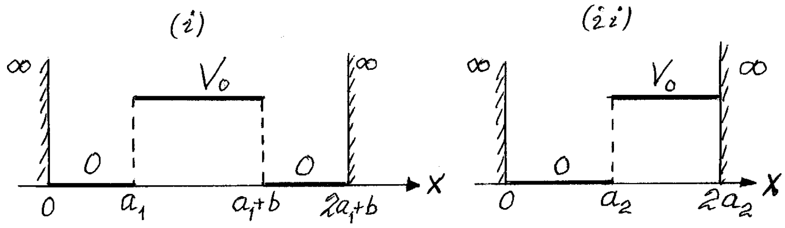


Figuren viser to energiegenfunksjoner for potensialet

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{for} \quad 0 < x < L, \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

Hva er bølgelengdene λ, bølgetallene k, og den kinetiske energien $E - V_0$ for de to løsningene? (Partikkelen har massen m.)

g. To partikler med masse m beveger seg i hvert sitt potensial:



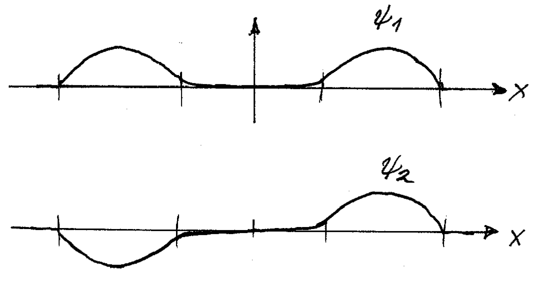
Her er lengdene a_1 og a_2 valgt slik at grunntilstandsenergiene begge er lik V_0:

$$E_1^{(i)} = E_1^{(ii)} = V_0.$$

Skissér de to grunntilstandene $\psi_1^{(i)}$ og $\psi_1^{(ii)}$. Finn a_1. Forklar hvorfor a_2 må være større enn a_1, og finn forholdet a_2/a_1, om du kan. [Hint: I et symmetrisk potensial er grunntilstanden symmetrisk.]

Oppgave 17 Endimensjonal dobbelt-brønn

a. I denne oppgaven er potensialet av samme type som ovenfor, men barrieren i midten er mye høyere enn ovenfor. Barriere-området blir da nokså "strengt forbudt" klassisk (og nokså "ugjennomtrengelig") for tilstandene med lavest energi. Dette viser seg bl.a ved at bølgefunksjonene ψ_1 og ψ_2 for grunntilstanden og første eksiterte nivå for dette potensialet, som er henholdsvis symmetrisk og antisymmetrisk, begge er sterkt "undertrykt" i det forbudte barriereområdet. I de "tillatte" områdene (brønnene) vil løsningene da ligne sterkt på boksløsninger, som vist i figuren.



Forklar med utgangspunkt i krumningen til de to ψ-ene hvorfor de to energiene (E_1 og E_2) må være nokså like i dette tilfellet, slik at $\Delta E \equiv E_2 - E_1$ blir liten i forhold til E_1 og E_2. [Hint: Sammenlign bølgelengdene (og dermed bølgetallene) til de sinusformede kurvene i de klassisk tillatte områdene.]
Forklar også hvorfor de sinusformede funksjonene i de klassisk tillatte områdene må ha omtrent samme "amplitude". [Hint: Tenk på at både ψ_1 og ψ_2 skal være normerte.] Merk at dette betyr ψ_1 og ψ_2 er omtrent like i høyre brønn, og omtrent motsatt like i venstre brønn. Forklar også hvorfor de (sterkt understrykte) løsningene i barriereområdet i midten må være av typen $A\cosh[\kappa_1 x]$ og $B\sinh[\kappa_2 x]$ for henholdsvis ψ_1 og ψ_2.

b. Anta at vi preparerer systemet i tilstanden $\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$ ved $t = 0$. Løsningen av Schrödingerligningen for $t > 0$ blir da ifølge Tillegg 2

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right].$$

Argumentér for at partikkelen med stor sikkerhet befinner seg i brønnen til høyre ved $t = 0$, og at den omtrent like sikkert befinner seg i brønnen til venstre ved $t = T/2$, hvor $T = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$. [Hint: Jf det som ble sagt om ψ_1 og ψ_2 ovenfor, og se på den "relative fasen" mellom de to bidragene ovenfor, $\exp[-i(E_2 - E_1)t/\hbar]$.] Partikkelen kommer seg altså gjennom barrieren, selv om denne er høy!

c. Fra formelen for $\Psi(x,t)$ ovenfor er det lett å se at den relative fasefaktoren mellom de to leddene er lik $-i$ ved $t = T/4$, og at sannsynlighetstettheten da blir $|\Psi(x,T/4)|^2 = \frac{1}{2}(\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x))$, som er symmetrisk fordelt mellom de to brønnene. Betyr dette at partikkelen har "delt seg"?