

i Institutt for fysikk

Eksamen i TFY4215 Innføring i kvantefysikk

Faglig kontakt under prøven: Jon Andreas Støvneng

Tlf.: 45 45 55 33

Dato: 3. juni 2019

Tid (fra-til): 15.00 - 19.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C.

Godkjent kalkulator.

Rottmann, matematisk formelsamling.

Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter.

Formler, 4 sider. (Er også tilgjengelig som PDF.)

(Høyreklikk for å åpne i eget uavhengig vindu. Mac: Ctrl+klikk.)

Annen informasjon:

40 flervalgsoppgaver med lik vekt. Kun ett svar er korrekt på hver oppgave.

1 poeng for riktig svar. 0 poeng for feil svar eller intet svar.

- 1** Emisjon av et foton fra hydrogenatomer der slutt-tilstanden tilsvarer at hovedkvantetallet er $n = 6$ kalles Humphrey-serien. Hva er omtrent bølgelengden til slike fotoner når start-tilstanden tilsvarer $n = 9$?

A $3 \mu\text{m}$ B $4 \mu\text{m}$ C $5 \mu\text{m}$ D $6 \mu\text{m}$ E $7 \mu\text{m}$

- 2** Oppgave 2 - 3: Fri partikkel.

En fri partikkel har kinetisk energi 12.4 MeV og impuls $1.76 \text{ GeV}/c$. Hva er partikkelens masse?

A $25 \text{ GeV}/c^2$ B $50 \text{ GeV}/c^2$ C $75 \text{ GeV}/c^2$ D $100 \text{ GeV}/c^2$ E $125 \text{ GeV}/c^2$

- 3** Hva er partikkelens bølgelengde?

A 0.3 fm B 0.4 fm C 0.5 fm D 0.6 fm E 0.7 fm

- 4** Oppgave 4 - 7: Elektron i endimensjonal potensialboks.

Et elektron med masse m_e befinner seg i en endimensjonal potensialboks med harde vegger, dvs potensialet er $V(x) = 0$ for $0.00 < x < L = 30.0 \text{ \AA}$ og $V(x) = \infty$ ellers. Hva er omtrent elektronets hastighet dersom det befinner seg i 2. eksiterte energiegentilstand $\psi_3(x)$?

A 60 km/s B 160 km/s C 260 km/s D 360 km/s E 460 km/s

- 5** Elektronet emitterer et foton og gjennomgår dermed en overgang fra 2. til 1. eksiterte tilstand. Hva er omtrent det emitterte fotonets bølgelengde?

A $2 \mu\text{m}$ B $3 \mu\text{m}$ C $4 \mu\text{m}$ D $5 \mu\text{m}$ E $6 \mu\text{m}$

- 6 Anta nå at elektronet i utgangspunktet (ved et tidspunkt $t < 0$) befinner seg i 2. eksiterte tilstand, men at det til enhver tid er en viss sannsynlighet for at det spontant gjennomgår en overgang til 1. eksiterte tilstand (med emisjon av et foton). Og dersom elektronet befinner seg i 1. eksiterte tilstand, er det til enhver tid en viss sannsynlighet for at det spontant gjennomgår en overgang til grunntilstanden (med emisjon av et foton). Ved tidspunktet $t = 0$ er derfor situasjonen slik at elektronet beskrives av den normerte, men ikke-stasjonære bølgefunksjonen

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{3} \psi_2(x) + c_1 \psi_1(x)$$

Hva er sannsynligheten for at en måling av elektronets energi ved tidspunktet $t = 0$ vil gi grunntilstandsenergien E_1 ?

A 11% B 31% C 51% D 71% E 91%

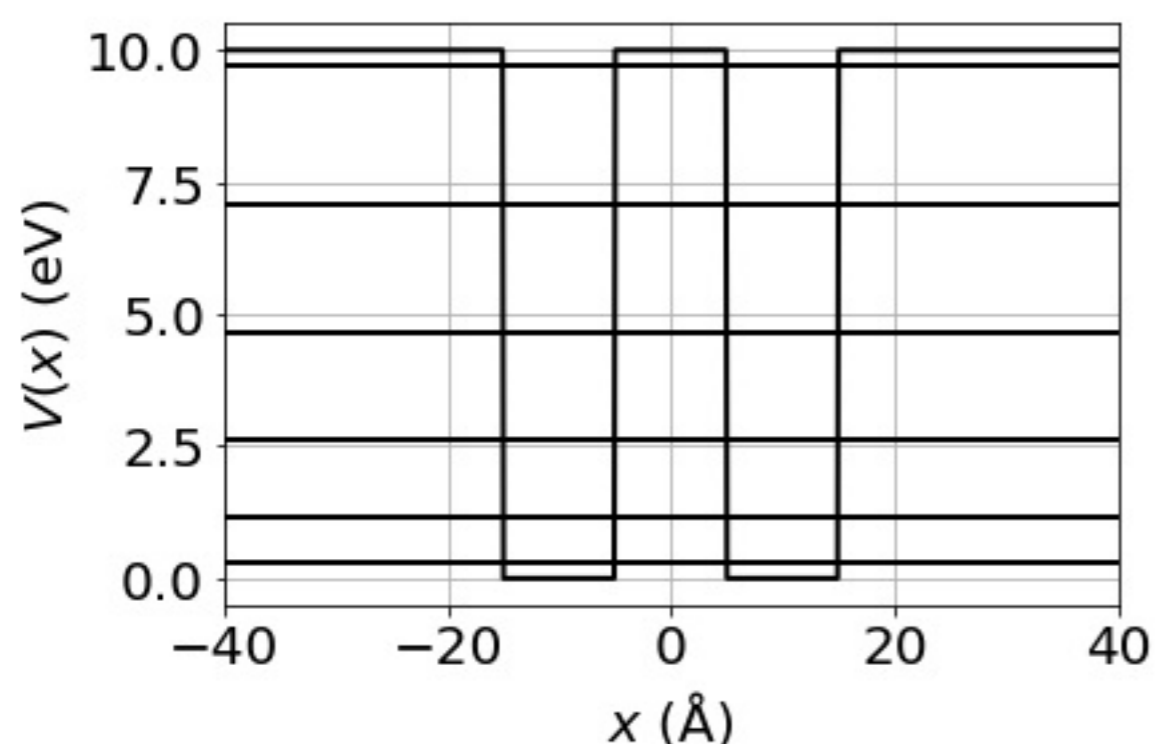
- 7 Anta i stedet at elektronet ved tidspunktet $t = 0$ er preparert i den normerte tilstanden

$$\Psi(x, 0) = \frac{2}{\sqrt{L}} \sin \frac{2\pi x}{L} \quad \text{for } 0 < x < \frac{L}{2}$$

og $\Psi(x, 0) = 0$ ellers. Hva er nå sannsynligheten for at en måling av elektronets energi gir verdien $E_2 = 2\pi^2 \hbar^2 / m_e L^2$?

A 25% B 50% C 75% D 90% E 100%

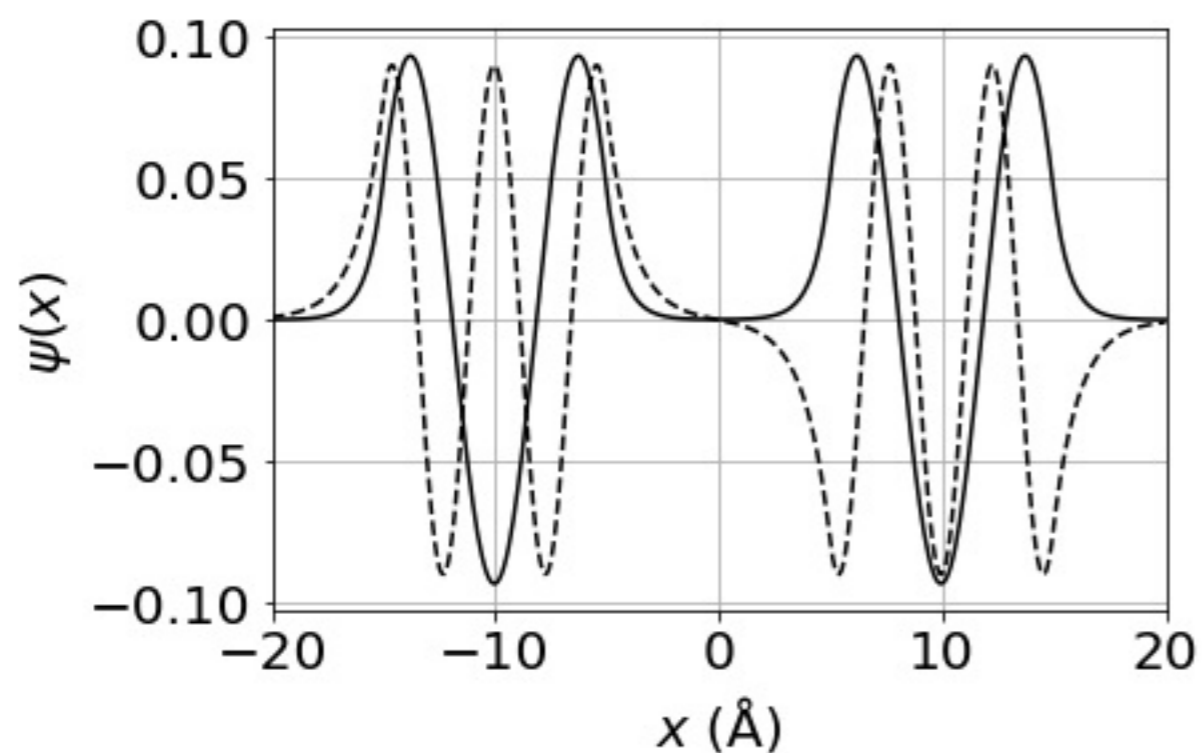
- 8 Oppgave 8 - 11: Elektron(er) i endimensjonalt toatomig modellmolekyl.



Et elektron med masse m_e befinner seg i det endimensjonale potensialet $V(x)$ vist i figuren over. En sentralt plassert barriere har høyde $V_0 = 10 \text{ eV}$ og bredde $b = 10 \text{ \AA}$. På hver side av denne barrieren er potensialet $V(x) = 0$ på intervaller med bredde $w = 10 \text{ \AA}$. Forøvrig har potensialet den konstante verdien $V(x) = V_0 = 10 \text{ eV}$. I figuren er energien til systemets 12 bundne (romlige) tilstander markert med horisontale linjer. Hva er omtrent energiegenverdien til 5. eksiterte tilstand?

A 1.2 eV B 2.6 eV C 4.6 eV D 7.1 eV E 9.7 eV

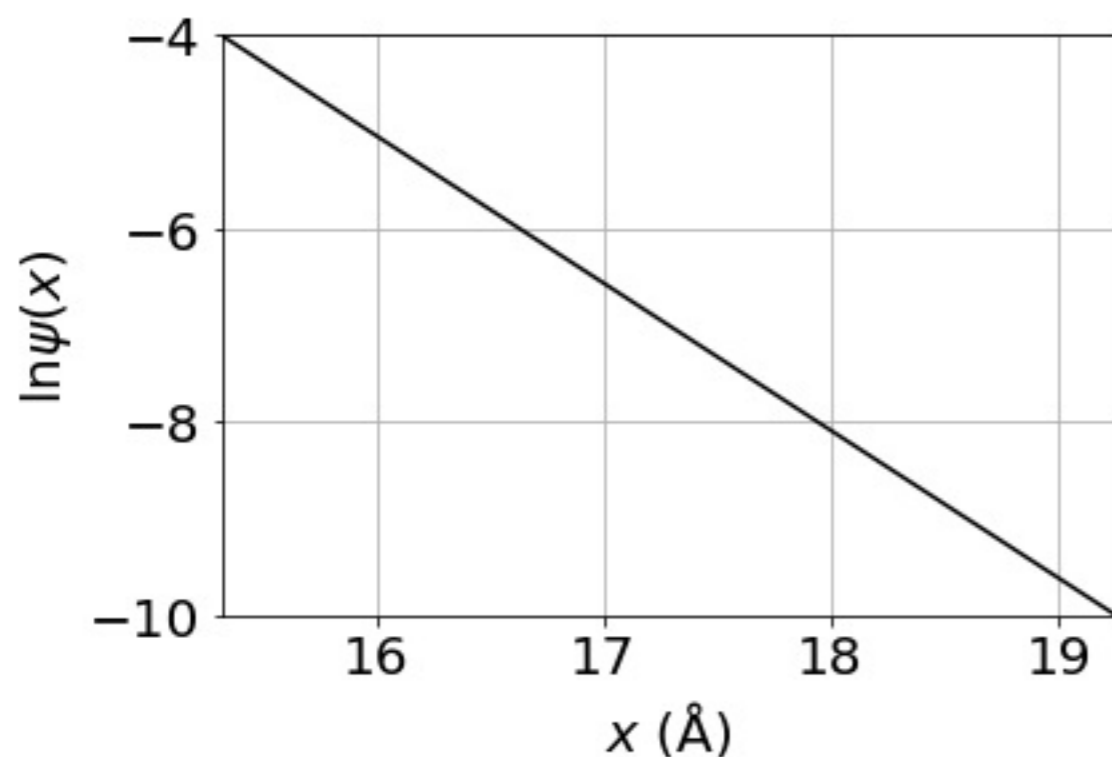
9



Anta at elektronet foretar en spontan overgang mellom de to bundne tilstandene angitt i figuren over, med utsendelse av et foton. Hva er dette fotonets bølgelengde? Det opplyses at elektronets bølgelengde (i det klassisk tillatte området) er hhv ca 459 og 753 pm i de to bundne tilstandene.

A 277 pm B 277 nm C 277 μm D 277 mm E 277 m

10



Figuren over viser $\ln \psi(x)$, for verdier av x mellom 1532 og 1925 pm, for en bundet tilstand i et utsnitt av det klassisk forbudte området til høyre for dobbeltbrønnen. Basert på disse opplysningene, hva er omtrent denne tilstandens energieverdi?

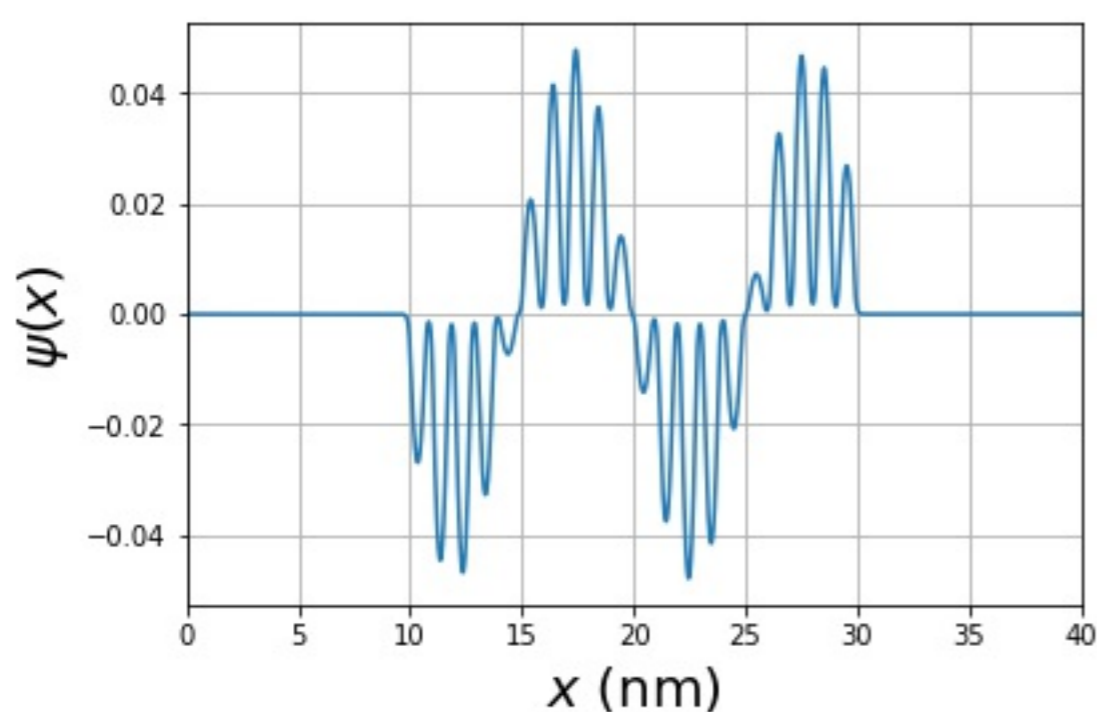
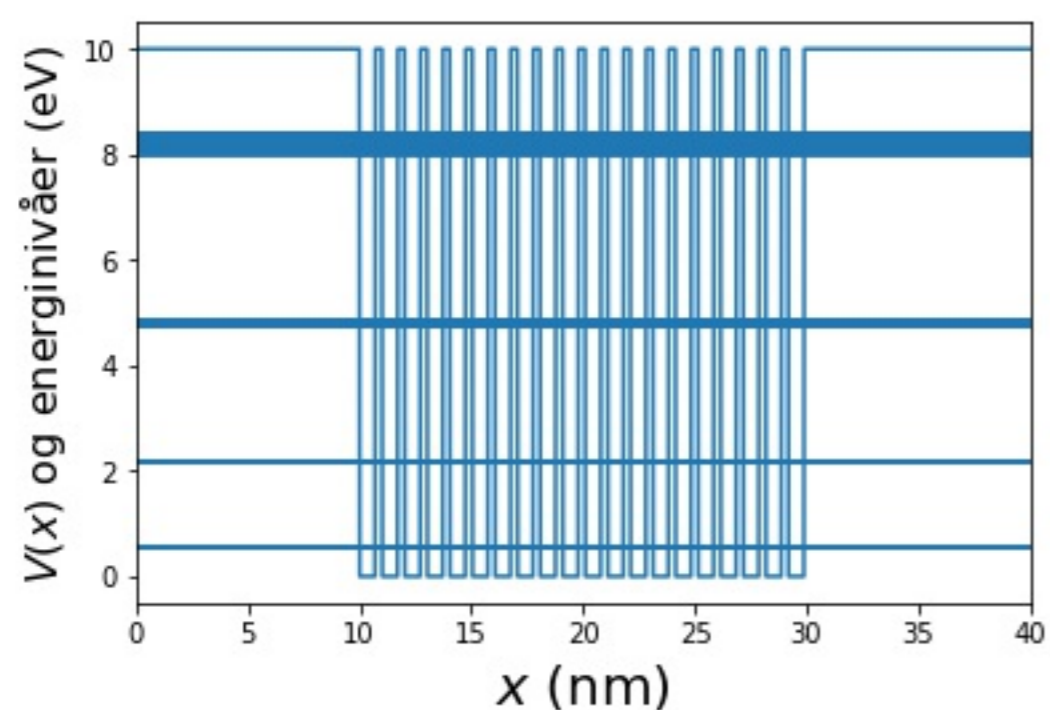
A 0.3 eV B 1.2 eV C 2.6 eV D 4.6 eV E 7.1 eV

11

Anta at molekylet består av to like atomer, begge med atomnummer 4, og at elektronene ikke vekselvirker med hverandre. Dog er elektronene fullt klar over at de er partikler med spinn $1/2$, slik at de er nødt til å adlyde Paulis eksklusjonsprinsipp. Hva er omtrent molekylets totale energi (dvs: summen av alle elektronenes energi) i grunntilstanden?

A 96 eV B 48 eV C 24 eV D 12 eV E 6 eV

12 Oppgave 12 - 14: Endimensjonal krystallmodell.



Som modell for en krystall bruker vi potensialet i den øverste figuren. Det består av 20 potensialbrønner, hver med bredde 0.70 nm og potensial lik null, adskilt av potensialbarrierer, hver med bredde 0.31 nm og potensial 10.0 eV. På høyre og venstre side er potensialet konstant med verdi 10.0 eV. Horisontale linjer i den øverste figuren angir samtlige 80 bundne (romlige) tilstander, fordelt på kvasikontinuerlige energibånd. Den nederste figuren viser en av disse bundne tilstandene. Hva er omtrentlig den tilhørende energieigenverdien?

- A 0.55 eV B 2.2 eV C 4.8 eV D 8.0 eV E 8.4 eV

- 13 Bølgefunksjonen som illustreres i den nederste figuren i forrige oppgave kan, med utmerket tilnærming, skrives på formen

$$\psi(x) = u(x) \sin kx$$

der funksjonen $u(x)$ har samme periodisitet som "krystallen". (Blochs teorem.) Hva er verdien av k i dette konkrete tilfellet?

- A 0.51 nm^{-1} B 0.63 nm^{-1} C 0.75 nm^{-1} D 0.87 nm^{-1} E 0.99 nm^{-1}

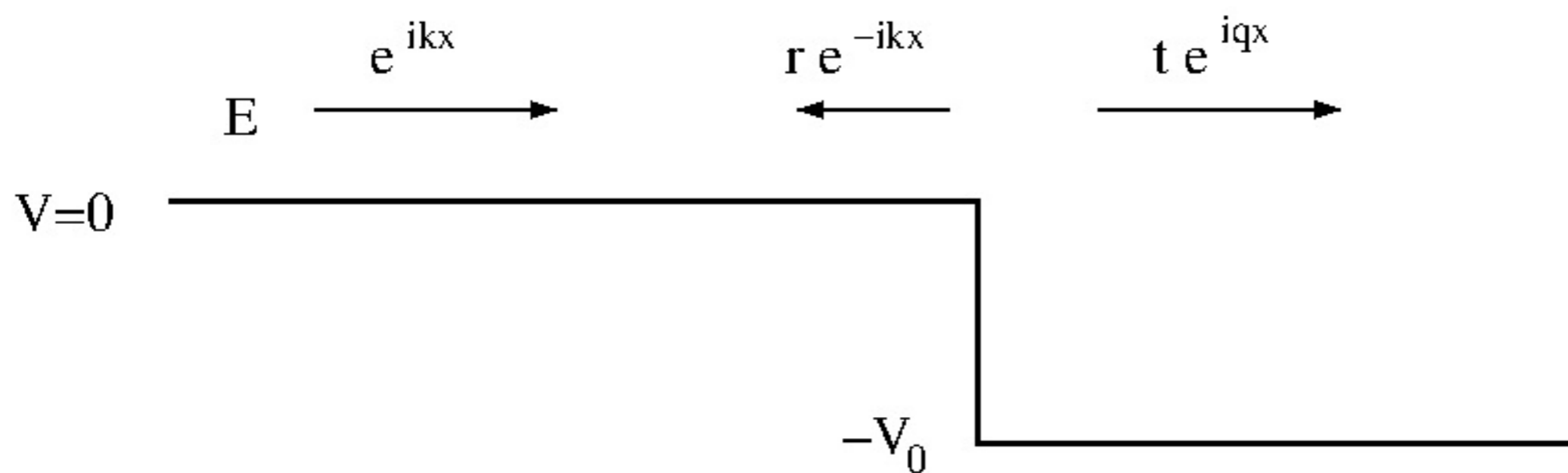
- 14 Anta at de 20 "atomene" i denne "krystallen" har 6 ikke-vekselvirkende elektroner hver. Elektroner er spinn-1/2-partikler som adlyder Pauliprinsippet. Omtrent hvor stort er båndgapet? (Dvs, energiavstanden fra høyeste okkuperte til laveste ledige tilstand.)

- A Null B 1.2 eV C 3.2 eV D 5.2 eV E 7.2 eV

- 15** Mandag 20. mai 2019 blir stående som en merkedag for SI-systemet, og spesielt for de fire enhetene ampere, kelvin, kilogram og mol. Fra denne dato defineres også disse enhetene med utgangspunkt i eksakte tallverdier for ulike naturkonstanter. (Fra før er meter, sekund og candela allerede basert på slike eksakte angitte naturkonstanter.)
For fire av de fem naturkonstantene listet opp nedenfor trådte eksakte tallverdier i kraft 20.05.2019. Hvilken av disse har hatt en eksakt tallverdi siden 1983?
- A Avogadros konstant
B Boltzmanns konstant
C Elementærladningen
D Lyshastigheten i vakuum
E Plancks konstant
- 16** Oppgave 16 - 19: Dimer av gull.
Molekylet $^{197}\text{Au}_2$ har bindingslengde 2.47 \AA . Vibrasjonsfrekvensen er $\nu = 5.73 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$. Molekylets reduserte masse er $98.5u$. Dersom vi beskriver vibrasjonsfrihetsgraden som en enkel harmonisk oscillator, hva er fjærkonstanten?
- A 213 N/mm B 213 N/cm C 213 N/m D 213 mN/m E 213 mN/km
- 17** Hva er det klassisk tillatte intervallet for avstanden mellom de to gullatomene i oscillatorens grunntilstand?
- A $(247 \pm 4) \text{ pm}$ B $(247 \pm 7) \text{ pm}$ C $(247 \pm 10) \text{ pm}$
D $(247 \pm 13) \text{ pm}$ E $(247 \pm 16) \text{ pm}$
- 18** I en gass med molekyler $^{197}\text{Au}_2$ er sannsynligheten for at et gitt molekyl har vibrasjonsenergi $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ proporsjonal med boltzmannfaktoren $\exp(-E_n/k_B T)$. Her er k_B Boltzmanns konstant og T er gassens (absolutte) temperatur. La N_0 og N_1 angi antall molekyler som befinner seg i hhv grunntilstanden og 1. eksiterte vibrasjonstilstand. Hvor stort er forholdet N_1/N_0 i en $^{197}\text{Au}_2$ -gass ved romtemperatur (300 K)?
- A 0.10 B 0.25 C 0.40 D 0.55 E 0.70
- 19** Anta så at molekylet $^{197}\text{Au}_2$ kan betraktes som en stiv rotator. Hva er energidifferansen mellom laveste og nest laveste tillatte rotasjonsenergi?
- A 6.9 neV B 69 neV C 0.69 μeV D 6.9 μeV E 69 μeV
- 20** Oppgave 20 - 25: Todimensjonal isotrop harmonisk oscillator.
Vi betrakter en todimensjonal isotrop harmonisk oscillator,
 $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (r^2 = x^2 + y^2),$
med energieigenfunksjoner
 $\psi_{n_x n_y}(x, y) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)$
på produktform, med envariabelfunksjoner som i formelvedlegget. Hva er (den romlige) degenerasjonsgraden til energinivået $E_N = (N + 1)\hbar\omega$?
- A $N + 1$ B $N(N + 1)$ C N^2 D $N(N - 1)$ E $N - 1$

- 21 Hva er dreieimpulsens absoluttverdi i tilstanden ψ_{01} ?
 A $2\hbar$ B Null C $\hbar/2$ D \hbar E Uskarp
- 22 Hva er L_z for en partikkel i tilstanden ψ_{01} ?
 A $2\hbar$ B Null C $\hbar/2$ D \hbar E Uskarp
- 23 Hva er $\langle L_z \rangle$ (dvs forventningsverdien av L_z) for en partikkel som befinner seg i tilstanden ψ_{01} ?
 A $2\hbar$ B Null C $\hbar/2$ D \hbar E Uskarp
- 24 Hvilken tilstand må en partikkel befinne seg i dersom L_z skal være skarp, med verdien $-\hbar$?
 A $\psi_{10} + \psi_{01}$ B ψ_{00} C $\psi_{10} - i\psi_{01}$ D ψ_{11} E $\psi_{20} - \psi_{02}$
- 25 12 identiske ikke-vekselvirkende fermioner (spinn-1/2-partikler) befinner seg i dette todimensjonale oscillatorpotensialet. Hva er systemets totale energi i grunntilstanden?
 A $28\hbar\omega$ B $34\hbar\omega$ C $40\hbar\omega$ D $46\hbar\omega$ E $52\hbar\omega$

- 26 Oppgave 26 og 27: Endimensjonalt spredningsproblem.



En partikkel med masse m og energi E sendes inn mot en grenseflate i posisjon $x = 0$. Her endrer potensialet seg brått fra 0 til $-V_0$ (se figur). Innkommende, reflektert og transmittert bølge er hhv $\psi_i(x) = \exp(ikx)$, $\psi_r(x) = r \exp(-ikx)$ og $\psi_t(x) = t \exp(iqx)$. Hva er riktig uttrykk for netto sannsynlighetsstrøm j ?

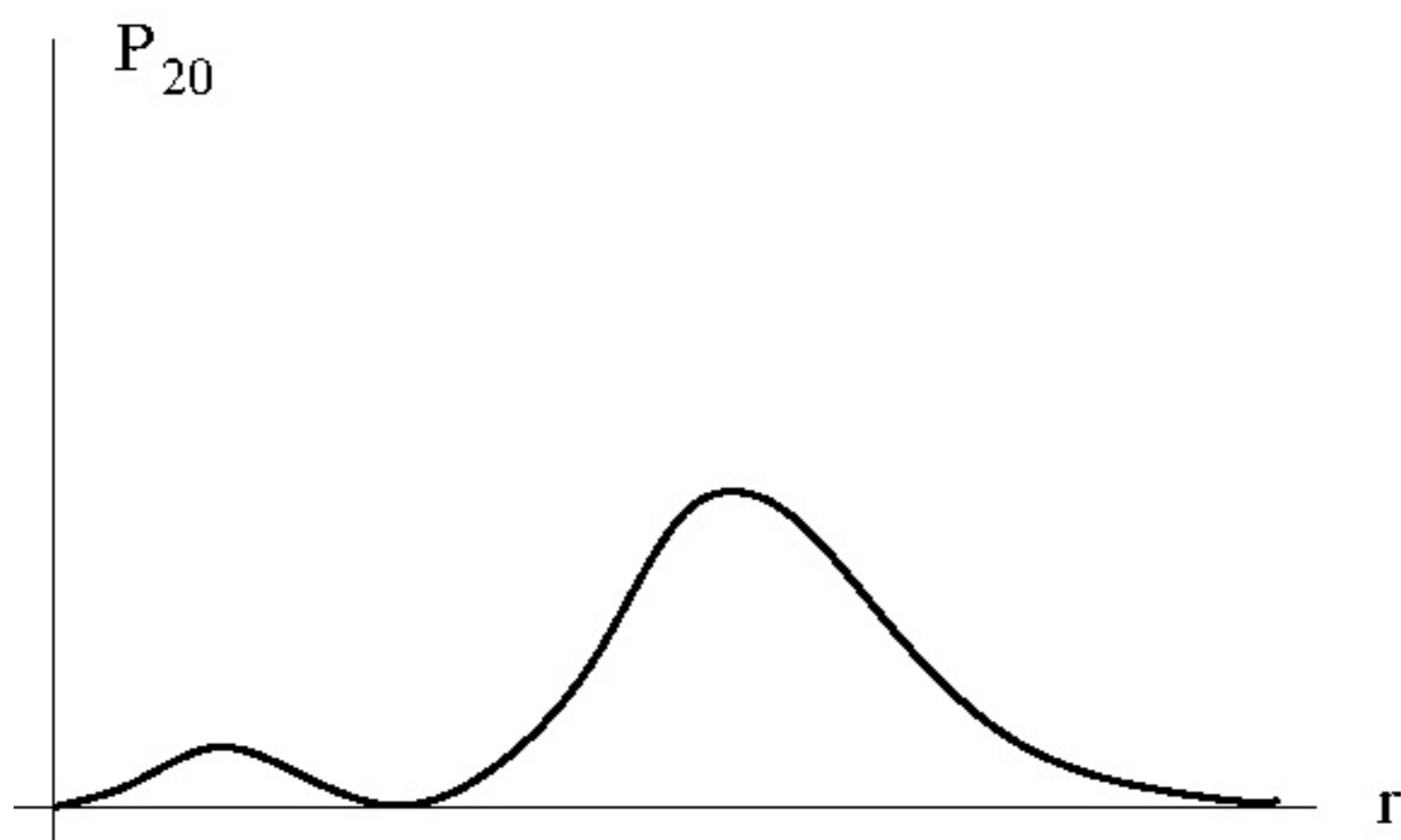
- A $|t|^2 \hbar q/m$ B $|r|^2 \hbar q/m$ C $-|r|^2 \hbar q/m$ D $\hbar k/m$ E $\hbar q/m$
- 27 Refleksjonsamplituden er $r = (k - q)/(k + q)$, og sannsynligheten for at partikkelen reflekteres er $R = |j_r/j_i|$, der j_i og j_r er hhv innkommende og reflektert sannsynlighetsstrøm. Hva er refleksjonssannsynligheten R dersom partikkelens energi er $E = V_0/5$?
 A 0.48 B 0.38 C 0.28 D 0.18 E 0.08

28 Oppgave 28 - 30: Hydrogenatomets $2s$ -tilstand.

En av energiegentilstandene i hydrogenatomet er $\psi_{200} = R_{20}Y_{00}$. Hva er elektronets klassiske venderadius i denne tilstanden?

- A 2.2 Å B 3.2 Å C 4.2 Å D 5.2 Å E 6.2 Å

29 I hvilken avstand fra kjernen er radialtettheten $P_{20} = (rR_{20})^2$ størst?
Det opplyses at radialtettheten ser *kvalitativt* omtrent slik ut:



(Tips: Maksimer like gjerne $\sqrt{P_{20}}$ som P_{20} .)

- A 0.77 Å B 1.77 Å C 2.77 Å D 3.77 Å E 4.77 Å

30 Hva ligger til grunn for at $2s$ -tilstanden i hydrogenatomet har spesielt lang levetid?

- A Energibevarelse.
B Impulsbevarelse.
C Ladningsbevarelse.
D Dreieimpulsbevarelse.
E Massebevarelse.

31 Oppgave 31 - 34: Kjemisk reaksjon med to uavhengige koordinater.

Energien i en kjemisk reaksjon avhenger av to dimensjonsløse koordinater x og y ,

$$E(x, y) = E_0(x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2).$$

Koordinatene x og y kan ha både positive og negative verdier. Energiparameteren E_0 er positiv. Hvor mange stasjonære punkter har energifunksjonen $E(x, y)$?

(Tips: I stasjonære punkter er $\nabla E = 0$.)

- A 1 B 2 C 4 D 6 E 9

32 Hva er systemets laveste mulige energi?

A $-2E_0$ B $-E_0$ C 0 D E_0 E $2E_0$

33 På grunn av symmetri er systemets grunntilstand degenerert, dvs det er flere kombinasjoner av x og y som tilsvarer minimal energi. Disse tilstandene (i alt 4) med minimal energi er adskilt av energibarrierer som må "overvinnes" hvis systemet skal kunne foreta en overgang fra et energiminimum til et annet. (Vi ser her bort fra muligheten for kvantemekanisk tunnelering.) Hva er aktiveringsenergien for en slik overgang mellom to "nabominima"? (Nabominima har samme verdi for en av de to koordinatene.)

A $E_0/2$ B E_0 C $3E_0/2$ D $2E_0$ E $5E_0/2$

34 Med to uavhengige koordinater i energifunksjonen har systemets hessianmatrise \mathbf{H} fire elementer

$H_{ij} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}$ der $x_1 = x$ og $x_2 = y$. Hvordan ser matrisen \mathbf{H}/E_0 ut for dette systemet?

A $\begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$
 C $\begin{bmatrix} 4x^3 - 4x & 0 \\ 0 & 4y^3 - 4y \end{bmatrix}$ D $\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$
 E $\begin{bmatrix} x^4 - 2x^2 & 2 \\ 2 & y^4 - 2y^2 \end{bmatrix}$

35 Oppgave 35 - 38: Spinn-1/2-partikkel.

En partikkel med spinn 1/2 befinner seg i spinntilstanden

$$\chi = C \begin{pmatrix} 2 + i \\ 2i - 1 \end{pmatrix}$$

Dersom normeringskonstanten C velges som et positivt reelt tall, hva er dens verdi?

A $\frac{1}{\sqrt{6}}$ B $\frac{1}{\sqrt{10}}$ C $\frac{1}{\sqrt{14}}$ D $\frac{1}{\sqrt{18}}$ E $\frac{1}{\sqrt{22}}$

36 Hva er partikkelens spinnkomponent S_y ?

A $\hbar/2$ B 0 C $-\hbar/2$ D \hbar E Uskarp

37 Hva er usikkerheten ΔS_z i partikkelens spinnkomponent S_z ?

A 0 B $\hbar/2$ C $\hbar/3$ D $\hbar/4$ E $\hbar/6$

38 Hva er kommutatoren $[\hat{S}_z, \hat{S}_x]$?

A \hbar^2 B $i\hat{p}_y$ C $-\hbar\hat{L}_y$ D $i\hbar\hat{S}_y$ E 0

39 Hvordan vil du kort og konsist beskrive Ehrenfests teorem?

- A Harmoniske oscillatorer har ekvidistante energinivåer.
- B Enhver partikkel kan tilintetgjøres eller skapes.
- C En partikkels posisjon og impuls kan ikke måles skarpt samtidig.
- D Kvantemekaniske forventningsverdier følger klassiske lover.
- E Bundne tilstander i en dimensjon er ikke degenererte.

40 Hva var *ikke* et element i Bohrs atommodell?

- A Stasjonære tilstander.
- B Kvantepprang.
- C Bølgefunksjoner.
- D Kvantisert dreieimpuls.
- E Kvantisert strålingsenergi.