

## TFY4215 Innføring i kvantefysikk

### Molekylfysikk Løsningsforslag til Øving 11

## Eten.

6. Med Hartree-Fock-metoden og basissettet 3-21G finner man en likevektsgeometri for eten med bindingslengdene C-H = 1.074 Å og C-C = 1.315 Å, og bindingsvinklene HCH = 116.2° og HCC = 121.9°. I forhold til de eksperimentelle verdiene C-H = 1.086 Å, C-C = 1.339 Å, HCH = 117.6° og HCC = 121.2° gir dette et midlere avvik i prosent på

$$\delta = \frac{1}{4} \left[ \left| \frac{1.074 - 1.086}{1.086} \right| + \left| \frac{1.315 - 1.339}{1.339} \right| + \left| \frac{116.2 - 117.6}{117.6} \right| + \left| \frac{121.9 - 121.2}{121.2} \right| \right] \times 100\% = 1.2\%$$

Legg merke til at vinklene HCH og HCC *ikke* er uavhengige i et slik symmetrisk molekyl (se punkt 7j nedenfor). Dermed burde vi strengt tatt ta bort det ene leddet i summen ovenfor og dividere med 3 i stedet for 4. Dette påvirker imidlertid ikke verdien på beregnet avvik i særlig grad.

7.

a) Med basissettet 3-21G (eller strengt tatt 3-21G(\*)) har vi, som nevnt i oppgaveteksten, tatt med to s-funksjoner for hvert H-atom og tre s- og seks p-funksjoner for hvert C-atom. I alt  $4 \times 2 + 2 \times 9 = 26$  basisfunksjoner. Det betyr at hver enkelt molekylorbital (MO)  $\Psi_i$  uttrykkes som en lineærkombinasjon av disse 26 basisfunksjonene  $\phi_\mu$ ,

$$\Phi_i = \sum_{\mu=1}^{26} c_{i\mu} \phi_\mu$$

med *koeffisienter*  $c_{i\mu}$  som angir ”bidraget” fra basisfunksjon nummer  $\mu$  til MO nummer  $i$ . Det å ”løse det kvantemekaniske problemet” for det aktuelle molekylet betyr da å finne koeffisienter  $c_{i\mu}$  slik at molekylets totale energi blir så lav som mulig.

Karbon har atomnummer 6, altså 6 elektroner, mens hydrogen har 1 elektron. Eten har dermed i alt 16 elektroner.

b) Inspeksjon av ethylene.spartan med Display – Output viser (i min beregning i hvert fall) at programmet brukte 3 iterasjoner på å optimere geometrien:

```
Point Group = DNH Order = 2 Nsymop = 8
This system has 3 degrees of freedom
Hessian from MMFF94 calculation used.
```

Cycle	Energy	Max. Grad.	Max. Dist.	Neg. Eigen
1	-77.5981973	0.01855	0.00897	
2	-77.6008962	0.00331	0.00021	
3	-77.6009879	0.00015	0.00000	

M001

```
E(HF) = -77.6009879 a.u.
```

En startgeometri med 1.815 Å mellom de to C-atomene resulterer i at programmet trenger 11 iterasjoner for å optimere geometrien. Selv med en startgeometri der jeg hadde endret både bindingslengder, bindingsvinkler og torsjonsvinkler til temmelig gale verdier, brukte programmet ikke mer enn 14 iterasjoner for å optimere geometrien.

c) Optimering av geometrien og beregning av vibrasjonsfrekvenser tok 1.3 CPU-sekunder:

```
Reason for exit: Successful completion
HF Program CPU Time : 000:00:01.3
HF Program Wall Time: 000:00:01.5
```

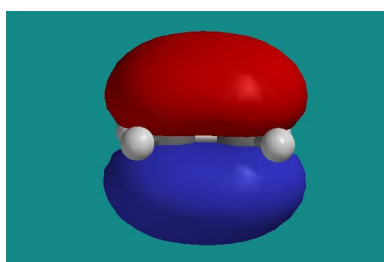
I en Hartree-Fock-beregning vil CPU-tiden skalere grovt sett med antall basisfunksjoner opphøyd i fjerde potens. Her har vi relativt få basisfunksjoner, og dessuten et *symmetrisk* molekyl, slik at antall frihetsgrader blir lite (se punkt 6 ovenfor og punkt 7j nedenfor) og regnetiden kort. Med økende antall atomer og mangel på symmetri blir det fort snakk om store numeriske beregninger.

d) De to C-atomene ligger på z-aksen, hele molekylet ligger i xz-planet:

Atom		Cartesian Coordinates (Ångstroms)		
		X	Y	Z
1	H H1	0.9115633	0.0000000	-1.2253162
2	C C1	0.0000000	0.0000000	-0.6575621
3	C C2	0.0000000	0.0000000	0.6575621
4	H H2	-0.9115633	0.0000000	-1.2253162
5	H H3	0.9115633	0.0000000	1.2253162
6	H H4	-0.9115633	0.0000000	1.2253162

e) Eten har 16 elektroner. Ifølge Pauliprinsippet kan vi bare ha ett elektron i hver enpartikkeltilstand. I hver MO kan vi ha ett elektron med spinn ”opp” og ett med spinn ”ned”. Vi fyller derfor 8 MO med 16 elektroner. Grunntilstanden tilsvarer at de 8 MO med lavest energi er okkupert av to elektroner hver. Orbitalen HOMO er ”Highest Occupied Molecular Orbital”, dvs den av de okkuperte MO med høyest energi, altså MO nummer 8. Orbitalen LUMO er ”Lowest Unoccupied Molecular Orbital”, dvs den av de uokkuperte med lavest energi, altså MO nummer 9. Orbital ”HOMO-n” er dermed MO nummer 8 – n.

f) Orbitalen HOMO ser slik ut:

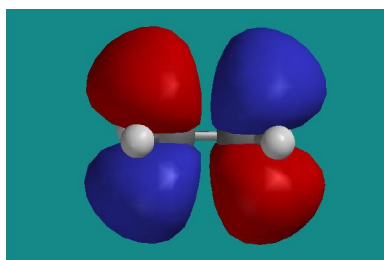


Den røde halvdel angir en overflate med konstant negativ verdi av orbitalen, den blå halvdel en overflate med tilsvarende positiv verdi. Med molekylet i xz-planet er det vel klart at det her er atomære  $p_y$ -orbitaler sentrert på de to C-atomene som bidrar. Dette stemmer med koeffisientene  $c_{8\mu}$  for MO nummer 8 i output-fila:

MO:		6	7	8	9	10
Eigenvalues:		-0.59082	-0.49887	-0.37970	0.18659	0.29869
(ev):		-16.07714	-13.57503	-10.33206	5.07744	8.12775
		Ag	B3g	B3u	B2g	Ag
1 H1	S	0.11943	-0.17957	0.00000	0.00000	0.01584
2 H1	S	0.11014	-0.15673	0.00000	0.00000	0.96355
3 C1	S	0.00829	0.00000	0.00000	0.00000	0.09064
4 C1	S	-0.02161	0.00000	0.00000	0.00000	-0.03106
5 C1	PX	0.00000	-0.26064	0.00000	0.00000	0.00000
6 C1	PY	0.00000	0.00000	0.32177	0.30232	0.00000
7 C1	PZ	-0.36461	0.00000	0.00000	0.00000	0.12964
8 C1	S	0.02856	0.00000	0.00000	0.00000	-1.39568
9 C1	PX	0.00000	-0.27725	0.00000	0.00000	0.00000
10 C1	PY	0.00000	0.00000	0.37234	0.76201	0.00000
11 C1	PZ	-0.22153	0.00000	0.00000	0.00000	0.63273
12 C2	S	0.00829	0.00000	0.00000	0.00000	0.09064
13 C2	S	-0.02161	0.00000	0.00000	0.00000	-0.03106
14 C2	PX	0.00000	0.26064	0.00000	0.00000	0.00000
15 C2	PY	0.00000	0.00000	0.32177	-0.30232	0.00000
16 C2	PZ	0.36461	0.00000	0.00000	0.00000	-0.12964
17 C2	S	0.02856	0.00000	0.00000	0.00000	-1.39568
18 C2	PX	0.00000	0.27725	0.00000	0.00000	0.00000
19 C2	PY	0.00000	0.00000	0.37234	-0.76201	0.00000
20 C2	PZ	0.22153	0.00000	0.00000	0.00000	-0.63273
21 H2	S	0.11943	0.17957	0.00000	0.00000	0.01584
22 H2	S	0.11014	0.15673	0.00000	0.00000	0.96355
23 H3	S	0.11943	0.17957	0.00000	0.00000	0.01584
24 H3	S	0.11014	0.15673	0.00000	0.00000	0.96355
25 H4	S	0.11943	-0.17957	0.00000	0.00000	0.01584
26 H4	S	0.11014	-0.15673	0.00000	0.00000	0.96355

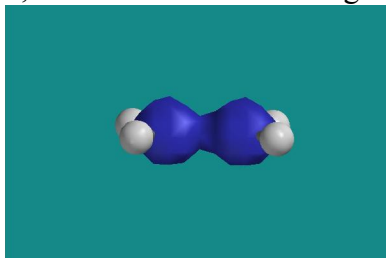
Det er kun for  $\mu = 6, 10, 15$  og  $19$  at MO nr 8 har koeffisienter forskjellig fra null. Disse fire tilsvarer  $p_y$ -orbitaler på de to karbonatomene C1 og C2. Vi ser også at de to C-atomene bidrar med likt fortegn på tilsvarende atomorbitaler (hhv 6 og 15, 10 og 19). Det resulterer i en såkalt ”bindende” MO.

g) LUMO er MO nr 9, den ser slik ut:



Vi ser fra output-fila at LUMO er bygd opp av de samme fire  $p_y$ -orbitalene som orbitalen HOMO, men denne gang med motsatt fortegn på tilsvarende atomorbitaler på de to C-atomene. Det resulterer i en såkalt "anti-bindende" MO. LUMO har "nodalplan" (dvs: plan der LUMO er lik null) både i  $xz$ - og i  $xy$ -planet, HOMO har nodalplan kun i  $xz$ -planet. Da er det samsvar med det dere har lært tidligere i kurset, nemlig at orbitalenes energi øker med økende antall nullpunkter.

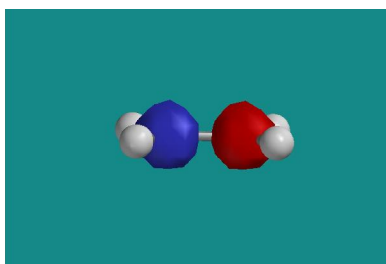
HOMO-7 er altså MO nummer 1, dvs den med lavest energi. Denne ser slik ut:



Det ser absolutt ut som om denne MO er bygd opp av  $s$ -orbitaler på karbon, hvilket stemmer bra med at koeffisientene  $c_{1,3}$  og  $c_{1,12}$  er de klart dominerende i MO nummer 1:

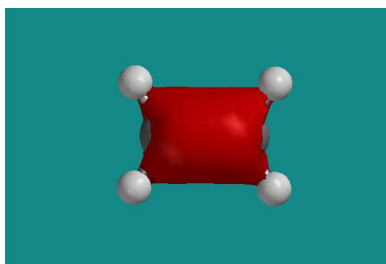
MO:		1	2	3	4	5
Eigenvalues:		-11.16625	-11.16605	-1.03819	-0.78870	-0.64657
(ev):		-303.84929	-303.84375	-28.25049	-21.46163	-17.59397
		Ag	B1u	Ag	B1u	B2u
1 H1	S	-0.00179	0.00028	0.07766	-0.13828	0.14663
2 H1	S	0.00968	-0.00805	0.00398	-0.06692	0.10789
3 C1	S	0.69758	-0.69791	-0.16680	0.12774	0.00000
4 C1	S	0.06538	-0.07106	0.18317	-0.13113	0.00000
5 C1	PX	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.28001
6 C1	PY	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
7 C1	PZ	-0.00169	-0.00207	0.11052	0.14357	0.00000
8 C1	S	-0.03146	0.06770	0.36822	-0.41834	0.00000
9 C1	PX	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.19335
10 C1	PY	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
11 C1	PZ	0.00440	0.01563	0.01587	0.06341	0.00000
12 C2	S	0.69758	0.69791	-0.16680	-0.12774	0.00000
13 C2	S	0.06538	0.07106	0.18317	0.13113	0.00000
14 C2	PX	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.28001
15 C2	PY	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
16 C2	PZ	0.00169	-0.00207	-0.11052	0.14357	0.00000
17 C2	S	-0.03146	-0.06770	0.36822	0.41834	0.00000
18 C2	PX	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.19335
19 C2	PY	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
20 C2	PZ	-0.00440	0.01563	-0.01587	0.06341	0.00000
21 H2	S	-0.00179	0.00028	0.07766	-0.13828	-0.14663
22 H2	S	0.00968	-0.00805	0.00398	-0.06692	-0.10789
23 H3	S	-0.00179	-0.00028	0.07766	0.13828	0.14663
24 H3	S	0.00968	0.00805	0.00398	0.06692	0.10789
25 H4	S	-0.00179	-0.00028	0.07766	0.13828	-0.14663
26 H4	S	0.00968	0.00805	0.00398	0.06692	-0.10789

HOMO-6, dvs MO nummer 2, er essensielt den antisymmetriske versjonen av MO nummer 1:



Vi ser av koeffisientene i output-fila at denne orbitalen også er bygd opp av s-funksjoner på karbon, med positivt fortegn på den ene og negativt fortegn på den andre. I MO nummer 2 er xy-planet et nodalplan, i MO nummer 1 har vi ingen nodalplan. Igjen et eksempel på en bindende og en anti-bindende MO, der sistnevnte har høyest energi av de to.

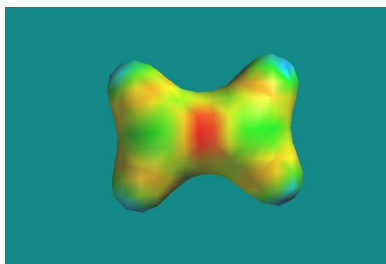
HOMO-5, dvs MO nummer 3 ser slik ut:



Vi ser vel at det her er snakk om en orbital med lik paritet (såkalt "gerade", i motsetning til "ungerade" for en med odde paritet), men utover det er det kanskje ikke så lett å fastslå rent visuelt hvilke atomære orbitaler som bidrar. Inspeksjon av koeffisientene i output-fila viser at det fortrinnsvis er s-orbitaler på karbon (og delvis hydrogen) og  $p_z$ -orbitaler på karbon som er "byggeklossene" i denne molekylorbitalen.

h) Lik paritet ("gerade") for en MO betyr at den har samme fortegn i posisjon  $\mathbf{r}$  og  $-\mathbf{r}$ , mens odde paritet ("ungerade") for en MO betyr at den har motsatt fortegn i  $\mathbf{r}$  og  $-\mathbf{r}$ . Av figurene i punkt g) ser vi at LUMO, HOMO-7 og HOMO-5 alle er av typen gerade, mens HOMO og HOMO-6 er av typen ungerade. Dette stemmer med symmetribetegnelsene i output-fila, angitt som B2g, B3u osv like over kolonnen med koeffisientene  $c_{ij}$ .

i) Flaten med konstant elektrontetthet og fargekodet verdi for det elektrostatiske potensialet ser slik ut:



Ikke overraskende finner vi området med lavest potensial (rødt) sentralt plassert i dobbeltbindingen mellom de to karbonatomene. Dette er et område som er "rikt på elektroner", og som dermed vil tiltrekkes av elektrofile (dvs "fattige på elektroner") områder i eventuelle reaksjonspartnere.

j) Ta for eksempel utgangspunkt i et koordinatsystem med origo sammenfallende med molekylets massesenter, dvs midt mellom de to C-atomene. Anta videre at det ene C-atomet ligger på z-aksen, i posisjon  $(0, 0, z_C)$ , og at ett av H-atomene nærmest dette C-atomet ligger i xz-planet, i posisjon  $(x_H, 0, z_H)$ . Symmetrikravet fastlegger da automatisk posisjonene til de resterende fire atomene: det andre C-atomet i posisjon  $(0, 0, -z_C)$  og de tre andre H-atomene i

posisjonene  $(x_H, 0, -z_H)$ ,  $(-x_H, 0, z_H)$  og  $(-x_H, 0, -z_H)$ . Det er med andre ord tilstrekkelig med *tre* uavhengige koordinater for å spesifisere hele molekylets geometri.

Alternativt kunne vi ha brukt 1) avstanden fra origo til det ene C-atomet:  $r_C = |z_C|$ , 2) avstanden fra dette C-atomet til det ene H-atomet:  $r_{C-H} = (x_H^2 + (z_H - z_C)^2)^{1/2}$ , og 3) vinkelen  $\theta$  mellom (avstands-)vektoren fra origo til C-atomet og vektoren fra C-atomet til H-atomet, gitt ved:  $\cos \theta = \mathbf{r}_C \cdot \mathbf{r}_{C-H} / r_C r_{C-H}$ . Sammenlignet med punkt 6 ovenfor tilsvarer dette  $r_C = (C-C)/2$ ,  $r_{C-H} = (C-H)$  og  $\theta = (180^\circ - HCC) = (HCH)/2$ .

Det er ikke vanskelig å tenke seg andre alternativer enn dette!

Vinklene HCH og HCC er altså *ikke* uavhengige i et slik symmetrisk molekyl: Med alle seks atomer i samme plan og dessuten en "symmetrisk" plassering av alle fire H-atomer i forhold til de to C-atomene, er vinkelen HCH fastlagt (som  $360^\circ - 2 \times HCC$ ) når vinkelen HCC er kjent, og omvendt.

Molekylets geometri, som i utgangspunktet er gitt ved 12 koordinater (reduisert fra 18, dvs x, y og z for hvert av de 6 atomene, til 12 ettersom vi her kun er interessert i den indre strukturen, ikke posisjon og orientering for hele molekylet sett under ett), er med andre ord fullstendig bestemt med kun 3 såkalt *indre koordinater*, for eksempel to bindingslengder og en bindingsvinkel. Symmetrien fastlegger de resterende koordinatene.

8.

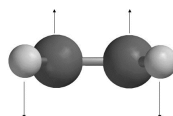
a) Vi skal regne om bølgetallsområdet mellom  $4000$  og  $500 \text{ cm}^{-1}$  til tilsvarende områder for bølgelengden, frekvensen og energien til det absorberte lyset. Vi har sammenhengene  $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda$ ,  $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{f}$  og  $\mathbf{E} = \mathbf{h}\mathbf{f}$  mellom bølgetall  $k$ , bølgelengde  $\lambda$ , lyshastighet  $c$ , frekvens  $f$ , energi  $E$  og Plancks konstant  $h$ . Dermed:

$(4000 \text{ til } 500) \text{ cm}^{-1}$  for  $k$  tilsvarer  $(15.7 \text{ til } 126) \mu\text{m}$  for  $\lambda$ ,  $(2387 \text{ til } 19100) \text{ GHz}$  for  $f$  og  $(10 \text{ til } 79) \text{ meV}$  for  $E$ .

Til sammenligning har vi synlig lys i bølgelengdeområdet  $(0.40 \text{ til } 0.76) \mu\text{m}$ . Vibrasjonsfrekvensene i molekylet tilsvarer med andre ord bølgelengder i det infrarøde området, derav betegnelsen IR-spektrum.

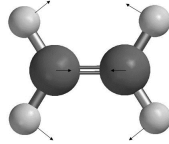
b) I vår beregning finner vi det desidert sterkeste vibrasjonsbåndet ved  $1115 \text{ cm}^{-1}$ . Denne verdien må skaleres med en faktor 0.85 for å gi den eksperimentelt målte vibrasjonsfrekvensen på  $949 \text{ cm}^{-1}$ . Denne faktoren er enda noe mindre enn den som vanligvis må benyttes for Hartree-Fock-beregnete frekvenser, men det er ingen tvil om at vi har lokalisert den "riktige" vibrasjonsmoden.

c) Illustrasjon av vibrasjonsbevegelsen for frekvensen  $1115 \text{ cm}^{-1}$ :



Dersom vi betrakter hvert H-atom som en positiv punktladning og hvert C-atom som en negativ punktladning, er det vel klart at denne vibrasjonsbevegelsen representerer en oscillerende elektrisk dipol. Dermed kan denne vibrasjonen eksiteres av det oscillerende elektriske feltet i den innkommende elektromagnetiske bølgen.

Båndet ved  $1522\text{ cm}^{-1}$  er et eksempel på en IR-inaktiv mode. Den tilhørende vibrasjonsbevegelsen foregår i molekylets plan (xz-planet) og kan illustreres slik:



Vi ser at denne vibrasjonen *ikke* tilsvarer en oscillerende elektrisk dipol – molekylets elektriske dipolmoment er null underveis i hele vibrasjonsbevegelsen. Denne moden eksiteres dermed ikke av det oscillerende elektriske feltet i den innkommende elektromagnetiske bølgen.