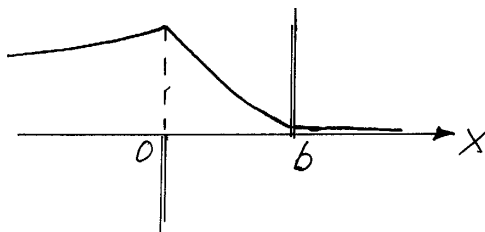


# LØSNING ØVING ??????????(nr 4 i F4250)

## Løsning oppgave ?????????? – 1 Elektron i potensial med to $\delta$ -funksjoner

**a.** ♠ En delta-brønn er grensen av en veldig dyp og veldig trang brønn. Inne i en *slik* brønn blir  $E - V$  svært stor, slik at den relative krumningen  $\psi''/\psi = 2m_e/\hbar^2[V - E]$  blir svært stor og negativ.  $\psi$  krummer da svært raskt *mot* akse. I grensen får den en knekk, *mot* akse. Ved en delta-*barriere* er det motsatt. Her “knekker” energieigenfunksjonen  $\psi$  *utover* fra akse.



♠ En bunden tilstand i dette potensialet må ha negativ energi  $E$ . Den relative krumningen  $\psi''/\psi = 2m_e/\hbar^2[V(x) - E] = 2m_e/\hbar^2[V(x) + |E|]$  blir da positiv for alle  $x \neq 0, b$ . Derfor må  $\psi$  krumme utover fra akse unntatt i origo.

**b.** ♠ Med  $E = 0$  følger det at  $\psi_0''$  må være lik null og  $\psi_0$  lineær i alle områder hvor  $V(x) = 0$ , bl.a for  $x < 0$ . Da en energieigenfunksjon ikke får lov å divergere, må den da være konstant i dette området. Denne konstanten kan vi like godt sette lik 1, da denne tilstanden uansett ikke er normerbar. (Av samme grunn må den også være konstant for  $x > b$ .)

♠ Fra den oppgitte diskontinuitetsbetingelsen følger det nå at

$$\psi_0'(0^+) = \psi_0'(0^-) - \frac{2g}{a_0}\psi_0(0) = -\frac{2g}{a_0}.$$

Siden  $\psi_0$  er lineær i området  $0 < x < b$ , følger det at  $\psi_0(x) = 1 - 2gx/a_0$  i dette området.

**c.** ♠ For  $0 < b < a_0/2g \equiv b_0$  ser vi at  $\psi_0(b)$  er positiv:

$$\psi_0(b) = 1 - \frac{2gb}{a_0} = 1 - \frac{b}{b_0} > 0.$$

Siden  $\psi_0$  skal være lineær for  $x > b$  og ikke får lov å divergere, må den være konstant i dette området:

$$\psi_0(x) = \psi_0(b) = 1 - \frac{2gb}{a_0} \quad \text{for } x > b.$$

Diskontinuitetsbetingelsen i  $x = b$  gir da

$$0 - \left(-\frac{2g}{a_0}\right) = \frac{2f}{a_0}\psi_0(b).$$

Den  $f$ -verdien som skal til for å gi denne egenfunksjonen energien  $E = 0$  er altså for en gitt  $b$ -verdi

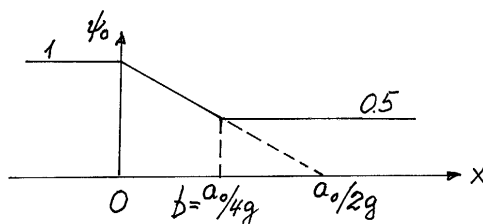
$$f_0(b) = \frac{g}{\psi_0(b)} = \frac{g}{1 - 2gb/a_0}.$$

♠(i) I grensen  $b \rightarrow 0$  ser vi at  $f_0(0) = g$ : De to delta-funksjonene opphever da hverandre, og dette er akkurat det som skal til for å gi oss egenfunksjonen  $\psi_0 = 1$ , med energien  $E = 0$ .

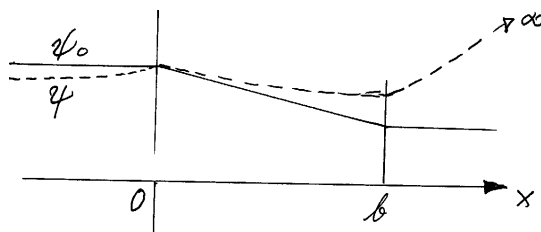
(ii) For  $b = a_0/4g$  er  $f_0 = 2g$ , så her må barrierehøyden være dobbelt så stor som brønnedybden for at tilstanden  $\psi_0$  skal få null energi.

(iii) Når  $b$  nærmer seg grensen  $a_0/2g$  ( $\equiv b_0$ ), ser vi at barrierehøyden  $f_0$  tvinges til å nærme seg uendelig for at  $\psi_0$  skal ha energien  $E = 0$ .

d. ♠ For  $b = a_0/4g$  får  $\psi_0$  formen



♠ La oss prøve å finne en løsning med formen  $\psi = Ce^{\kappa x}$  for  $x < 0$ , og nøste videre derfra. En eventuell bunden tilstand må nemlig ha denne formen til venstre for origo. Her trenger ikke  $\kappa$  å være stor, men den må være positiv. Siden  $\psi'(0^-)$  er positiv, følger det fra diskontinuitetsbetingelsen i origo at  $\psi'$  blir større enn  $\psi'_0$  til høyre for origo. Og fordi  $\psi$  i motsetning til  $\psi_0$  må krumme utover fra akse for  $0 < x < b$ , blir  $\psi'(b^-)$  enda litt større enn  $\psi'_0(b^-)$ . Fra diskontinuitetsbetingelsen i  $x = b$  følger det da at løsningen  $\psi$  får en positiv derivert i  $x = b^+$ . Til høyre for dette punktet skal  $\psi$  igjen krumme utover.



Denne løsningen vil derfor gå mot uendelig, og er følgelig ingen energiegenfunksjon. Egenfunksjonen  $\psi_0$  er derfor grunntilstanden, og siden denne er ubunden, har vi ingen bundne tilstander for dette systemet.

e. ♠ Da  $\psi'$  må være endelig på begge sider av punktet  $x = b$ , følger det fra diskontinuitetsbetingelsen

$$\psi'(b^+) - \psi'(b^-) = \frac{2f}{a_0} \psi(b)$$

at  $\psi(b)$  må gå mot null i grensen  $f \rightarrow \infty$ .

♠ I området  $0 < x < b$  kan vi da skrive den generelle løsningen som en lineærkombinasjon

$$\psi = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} = A'e^{\kappa(x-b)} + B'e^{-\kappa(x-b)}.$$

Betingelsen  $\psi(b) = 0$  gir da  $B' = -A'$ , slik at bølgefunksjonen i dette området får formen

$$\psi = A'(e^{\kappa(x-b)} - e^{-\kappa(x-b)}) = C \sinh[\kappa(x-b)], \quad \text{q.e.d.}$$

♠ For  $x < 0$  må vi ha  $\psi = De^{\kappa x}$ , da  $e^{-\kappa x}$  divergerer.

♠ Diskontinuitetsbetingelsen i origo gir da

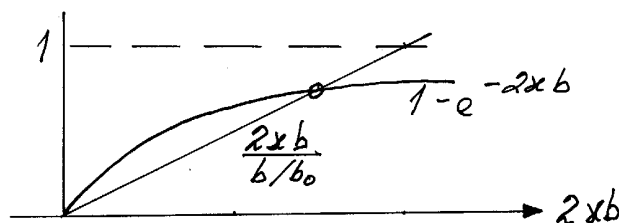
$$-\frac{2g}{a_0} = \frac{\psi'(0^+)}{\psi(0)} - \frac{\psi'(0^-)}{\psi(0)} = \kappa \coth[\kappa(-b)] - \kappa,$$

eller

$$\kappa b(\coth(\kappa b) + 1) = \frac{2gb}{a_0} \quad (\equiv \frac{b}{b_0}).$$

♠ Venstresiden kan omformes til  $2\kappa b/(1 - e^{-2\kappa b})$ , slik at betingelsen som bestemmer energien  $E = -\hbar^2 \kappa^2/(2m_e)$  kan skrives på formen

$$1 - e^{-2\kappa b} = \frac{2\kappa b}{b/b_0}.$$



Figuren viser en prinsippskisse av venstre og høyre side for  $b > b_0$ . Vi merker oss at den deriverte av venstresiden i origo (med hensyn på variabelen  $2\kappa b$ ) er lik 1, mens den deriverte av høyresiden er  $b_0/b < 1$ . Derfor får vi et skjæringspunkt for positiv  $\kappa$ , og dermed en bunden grunntilstand.

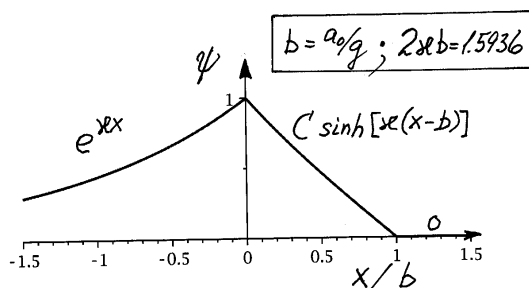
♠ For  $b = 2b_0 = a_0/g$  skal vi løse ligningen

$$2(1 - e^{-x}) = x, \quad \text{der } x = 2\kappa b.$$

Noen forsøk med kalkulatoren gir  $x = 2\kappa b \approx 1.5936$ . Innsetting gir da

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_e} = \dots = -g^2 \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \cdot \frac{x^2}{4}.$$

Forholdet mellom denne energien og den vi har for  $f = 0$  er altså  $x^2/4 \approx 0.635$ . Løsningen ser slik ut:



Merk at vi får samme løsning med en hard vegg i  $x = b$ .

**Løsning oppgave ?????????? – 2  $\alpha$ -desintegrasjon**

**a.** Ved å ta “forholdet” mellom ligningene  $V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  og  $E = V(r_2) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$  finner vi at

$$V(r) = E \frac{r_2}{r}, \quad \text{q.e.d.}$$

Som en sjekk kan en merke seg at  $V(r_2)$  er lik  $E$ . Merk også at “toppen” av barrieren er  $V_{\max} = Er_2/r_1$ . Ved å sette inn i den oppgitte formelen er det lett å se at

$$\ln T \cong -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} r_2 \int_{r_1/r_2}^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx.$$

Ved å innføre som ny integrasjonsvariabel  $x = \cos^2 y$  er det videre nokså enkelt å vise at integralet er

$$\begin{aligned} I &= \arccos \sqrt{r_1/r_2} - \sqrt{r_1/r_2(1 - r_1/r_2)} = \frac{1}{2}\pi - \arcsin \sqrt{r_1/r_2} - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)} \\ &\approx \frac{1}{2}\pi - 2\sqrt{r_1/r_2}. \end{aligned}$$

**b.** Med denne tilnærmelsen for integralet finner vi at

$$\begin{aligned} \ln T &\cong -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \cdot r_2 \cdot I \\ &\approx -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \cdot \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \left( \frac{1}{2}\pi - 2\sqrt{\frac{r_1 4\pi\epsilon_0 E}{2Ze^2}} \right) \\ &= -2 \left[ \frac{\pi e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \sqrt{2mc^2} \frac{Z}{\sqrt{E}} - 4\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}} \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar c}} \sqrt{r_1 Z} \right] \\ &\equiv -2 \left[ K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Zr_1} \right], \end{aligned}$$

med

$$\begin{aligned} K_1 &\equiv \pi \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \sqrt{2mc^2} = 1.979(\text{MeV})^{1/2}, \\ K_2 &\equiv 4\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}} \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar c}} = 1.485 \text{ fm}^{-1/2}, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Her har vi brukt at  $\hbar c = 1.9735 \times 10^8 \text{ eV fm}$  og at hvilemasse-energien for  $\alpha$ -partikkelen er  $mc^2 = 3727.38 \text{ MeV}$ .

**c.** For  $T \ll 1$  har vi med veldig god tilnærming

$$e^{-T} = 1 - T + \frac{1}{2}T^2 + \dots \approx 1 - T.$$

Derfor kan sannsynligheten for at  $\alpha$ -partikkelen befinner seg i kjernen ved tiden  $t$  skrives på formen

$$P(t) = (1 - T)^{t/t_1} = e^{-Tt/t_1} \equiv e^{-t/\tau}, \quad \text{med} \quad \tau = \frac{t_1}{T}.$$

Denne er som vi ser redusert med en faktor  $1/e$  ved tiden  $t = \tau$ , så levetiden er

$$\tau = \frac{t_1}{T}.$$

(Her ser vi at jo mindre transmisjonskoeffisienten  $T$  er, desto større blir ganske riktig  $\tau$ .)

**d.** Siden dette uansett er en veldig røff modell, kan vi som nevnt ganske enkelt sette  $t_1 = 2r_1/v$ , hvor vi bruker  $v = \sqrt{2E/m}$ . Hvis jeg da har regnet rett, kommer kjerneradien ut som  $r_1 = 6.379$  fm for polonium og  $r_1 = 6.575$  fm for thorium. Tiden  $t_1 = 2r_1/v = \sqrt{mc^2/2E} \cdot 2r_1/c$  kommer dermed ut som

$$\begin{aligned} t_1 &= 6.16 \times 10^{-22} \text{ s for polonium, og som} \\ t_1 &= 9.35 \times 10^{-22} \text{ s for thorium.} \end{aligned}$$

Med “opphavs”-kjernen  $^{212}_{84}\text{Po}$  er *datteren*  $^{208}_{82}\text{Pb}$ , og vi finner med  $Z = 82$

$$\ln T_{\text{Po}} \approx -2 \left[ 1.9793 \frac{82}{\sqrt{8.9}} - 1.485 \sqrt{82 \cdot 6.379} \right] = -40.94, \quad \Rightarrow \quad T_{\text{Po}} = 1.66 \times 10^{-18}.$$

*Datteren* til  $^{232}_{90}\text{Th}$  er  $^{228}_{88}\text{Ra}$  og vi finner

$$\ln T_{\text{Th}} \approx -2 \left[ 1.9793 \frac{88}{\sqrt{4.1}} - 1.485 \sqrt{88 \cdot 6.575} \right] = -100.6, \quad \Rightarrow \quad T_{\text{Th}} = 2.04 \times 10^{-44}.$$

Denne enkle modellen gir da levetidene

$$\begin{aligned} \tau_{\text{Po}} &= \frac{t_1}{T} = 3.7 \times 10^{-4} \text{ s for } ^{212}_{82}\text{Po} \text{ og} \\ \tau_{\text{Th}} &= \frac{t_1}{T} = 4.6 \times 10^{22} \text{ s} = 1.4 \times 10^{15} \text{ y for } ^{232}_{90}\text{Th.} \end{aligned}$$

Forholdet mellom disse levetidene er

$$\frac{\tau_{\text{Th}}}{\tau_{\text{Po}}} \approx 1.24 \times 10^{26}.$$

De tilsvarende eksperimentelle resultatene for *halveringstidene* og forholdet mellom dem er

$$\tau_{1/2}(^{212}_{82}\text{Po}) = 3 \times 10^{-7} \text{ s}, \quad \tau_{1/2}(^{232}_{90}\text{Th}) = 1.4 \times 10^{10} \text{ y} = 4.42 \times 10^{17} \text{ s}, \quad \frac{\tau_{\text{Th}}}{\tau_{\text{Po}}} \approx 1.47 \times 10^{24}.$$

Det som er imponerende her er at vi finner omtrent det rette forholdet. Derfor ligger forklaringen på de voldsomme variasjonene i levetid opplagt i tunneleffekten. At selve levetidene (de beregnede) ligger et godt stykke unna de eksperimentelle skyldes de forenklingene som vi har gjort med denne enkle modellen. Ved siden av de matematiske approksimasjonene har vi brukt en fysisk modell som er for enkel. For eksempel ville det nok være mer realistisk å operere med en større verdi  $r_1$  for den indre venderadien. Dessuten har også  $\alpha$ -partikkelen en endelig radius, slik at den sterke kjernekräften antakelig griper tak ved en senteravstand på rundt 9 fm, istedenfor 6.5 fm, som vi har regnet med ovenfor. Dette ville svare til en kortere barriere og dermed kortere levetider. Men denne og andre korreksjoner betyr mer for selve levetidene enn for forholdene mellom dem, særlig hvis en betrakter isotoper av samme grunnstoff. (Se avsnitt 8.2 i Griffiths.)