

Schrödinger ligningen (SL)

= (ikke-relativistisk) bølgeligning for partikler (med masse)

Minner om klassisk bølgeligning, for mek. og E.M. bølger:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (\text{evt } \nabla^2 \xi = \frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \text{ i 3D})$$

Harmoniske ("monokromatiske") løsninger:

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \xi_0 \sin(kx - \omega t) \\ &= \xi_0 \operatorname{Re} e^{i(kx - \omega t)} \quad (i = \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

"Bølgerelationer":

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T},$$

$$v_f = \lambda/T = \lambda v = \omega/k = \text{fasefart}$$

$$v_g = d\omega/dk = \text{gruppefart}$$

For fri partikkel, masse m , potensial $V=0$:

$$E = K = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$$

Prøver harmonisk bølge $\Psi(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}$

I følge de Broglie: $\lambda = h/p$ og $v = E/h$

$$\Rightarrow k = 2\pi/\lambda = p/h; \quad \omega = 2\pi v = E/h$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = e^{i(px - Et)/h}$$

(16)

Finner "passende" diff.ligning ved inspeksjon:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m} \Psi; \quad E = p^2/2m$$

$$\Rightarrow \underline{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}} \quad (\text{SL i 1D; } V=0)$$

For partikkel i konstant potensial $V_0 \neq 0$:

$$\Psi(x,t) = e^{i(px-Et)/\hbar} \quad (\text{som for } V=0)$$

$$i\hbar \partial \Psi / \partial t = E\Psi = (K+V)\Psi = (p^2/2m + V_0)\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial^2 \Psi / \partial x^2 = \frac{p^2}{2m} \Psi$$

$$\Rightarrow \underline{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0\right) \Psi} \quad (\text{SL i 1D; } V_0 = \text{konst})$$

Problem dersom $V(x) \neq \text{konstant}$: $\vec{F} = -\nabla V \neq 0$,
og $\vec{p}$ er ikke konstant.

Men samme diff.lign. viser seg å fungere:

$$\underline{i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})\right] \Psi(\vec{r},t)} \quad (\text{SL i 3D})$$

ga faktoren i på venstre side: Ψ alltid kompleks,
er ikke direkte målbar.

Tolkning av bølgefunksjonen

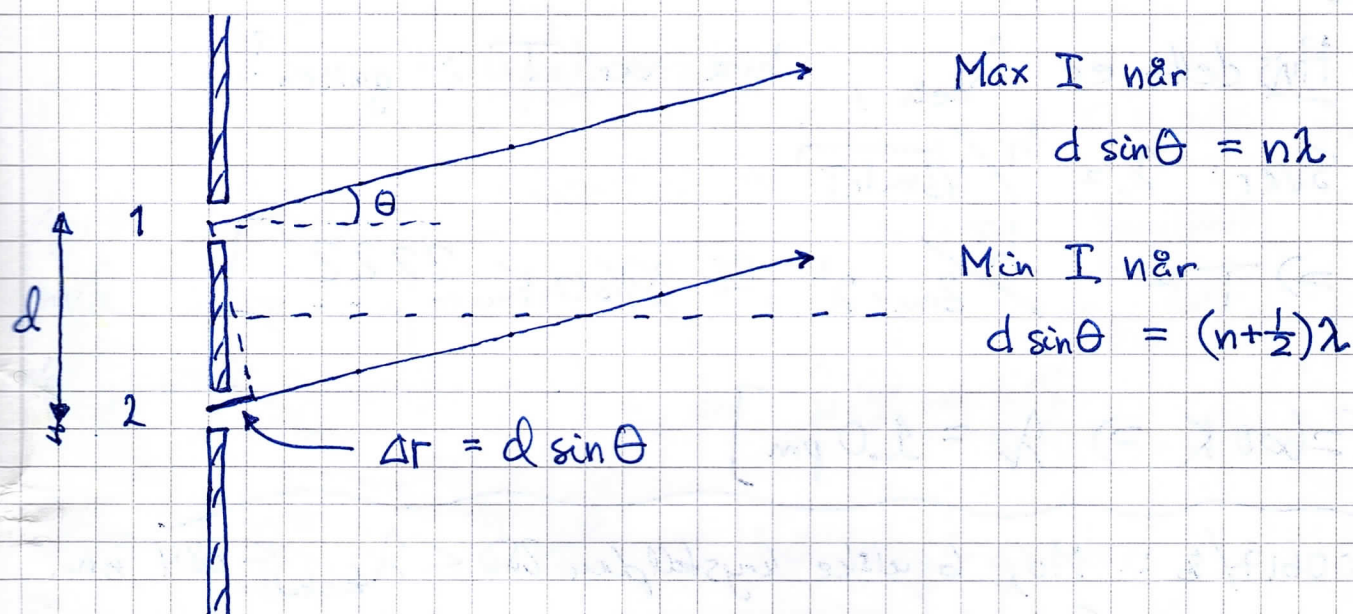
(17)

Send ett og ett foton, eller ett og ett elektron (evt atom, molekyl) inn mot dobbeltspalte (eller diffraksjonsgitter).

⇒ Interferensmønster på detektor/skjerm bak spaltene.

EM / fotoner: $I \sim |\vec{E}|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$

Elektroner etc: $I \sim |\Psi|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$



⇒ Tolker $|\Psi|^2$ som sannsynligheten for å detektere partikkelen i en gitt retning θ .

Mer presist:

$dP = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r$ = sanns. for å måle partikkelens posisjon i volum d^3r omkring $\vec{r}$ ved tid t

Normering: $\int_{\text{hele rommet}} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1$

Operator. Eigenfunksjon. Eigenverdi

(TMA4115, MA1201, MA1202)

$$\boxed{\hat{A} f(x) = A f(x)}$$

← Eigenverdiligning
 ↑ Operator ↑ Eigenfunksjon ↑ Eigenverdi ← Samme funk. som $\hat{A}$ virker på

• $\hat{p}(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} = \underline{\text{impulsoperator}}$

fordi $\Psi(x,t) = e^{i(px-Et)/\hbar}$ beskriver partikkel med "skarp" impuls p og er egenfunksjon til $\hat{p}$, med eigenverdi p ; dvs $\hat{p}\Psi = p\Psi$

• $\hat{K} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \underline{\text{kin. energi-operator}}$

fordi $\Psi(x,t)$ beskriver partikkel med skarp K og er egenfunk. til K , med egenr. $K = p^2/2m$

• $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0 = \text{Hamilton-operator}$

= op. for total energi $E = K + V_0$, fordi Ψ

beskriver part. med skarp E og er egenfunk.

til $\hat{H}$, med egenr. $E = K + V = p^2/2m + V_0$

Hvæ med $V(x) \neq \text{konst.}$? Da er p ikke konstant, men $E = K + V$ er fortsat konstant (konservativt system!)

$\Rightarrow$ Andre typer $\Psi(x,t)$ vil være egenfun. til $\hat{H} = \hat{K} + V(x)$

$$3D: x \rightarrow \vec{r}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \nabla; \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla; \quad \hat{K} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}$$

$$SL: \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

Stasjonære tilstande. TUSL

V uafh. av t ("altid" i TFY4215!)

$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot T(t)$ settes inn i SL:

$$i\hbar \psi \frac{\partial T}{\partial t} = T \hat{H} \psi \quad / \cdot 1/\psi T$$

$$\Rightarrow \underbrace{i\hbar \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{kun } t} = \underbrace{\frac{\hat{H} \psi}{\psi}}_{\text{kun } x} = \text{konst.} \stackrel{\text{kaller vi}}{=} E$$

må være ...

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{E}{i\hbar} dt \Rightarrow \boxed{T(t) = e^{-iEt/\hbar}}$$

"en gang for alle"!

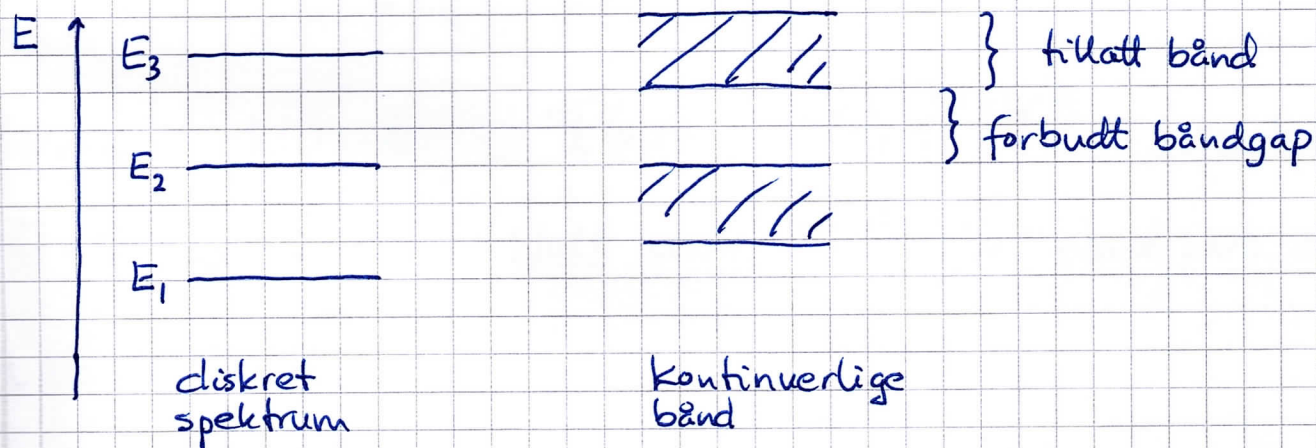
$$\text{eg: } \boxed{\hat{H} \psi = E \psi} \quad \text{TUSL}$$

$|\Psi|^2 = |\psi(x)|^2$ uafh. av $t \Rightarrow$ "Stasjonær tilstand"

Tolker: E = mulige energieigenr.; ψ = mulige energieigenfunkt.

Bundne tilstander $\left[\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi_n(x) = 0 \right]$ har
diskrete energier E_n .

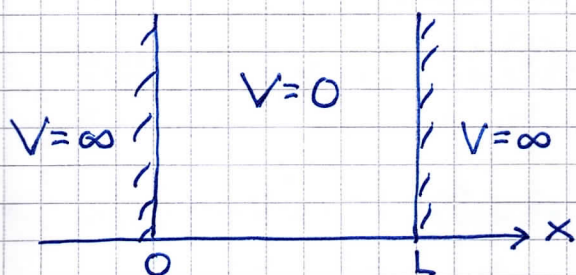
Ubundne tilstander $[\Psi(\pm\infty) \neq 0]$ tilsvarende
kontinuerlige energibånd.



Hvis TUSL har bundne løsninger $\{\Psi_n\}$ og
 ubundne løsninger $\{\Psi_E\}$ er generell løsning av SL:

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \Psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} + \int c_E \Psi_E(x) e^{-iEt/\hbar} dE$$

Partikkel i boks: Fint eksempel som illustrerer diverse generelle egenskaper og sammenhenger.



$$V(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 < x < L \\ \infty & ; \quad \text{ellers} \end{cases}$$

Stasjonære tilstander: $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$ (inne i boksen)

$\Psi = 0$ der $V = \infty$: Null sanns. $|\psi|^2$ for å finne part. der

Løsn. av TUSL:

$$\psi'' + k^2 \psi = 0 \quad ; \quad k^2 = 2mE/\hbar^2$$

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

$$\psi(0) = 0 \quad (\text{krever kontinuerlig } \psi) \Rightarrow B = 0$$

$$\psi(L) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow k_n \cdot L = n \cdot \pi \quad (n=1,2,3,\dots)$$

$$\Rightarrow E_n = \hbar^2 k_n^2 / 2m = n^2 \hbar^2 \pi^2 / 2mL^2$$

Bundne tilstander $\{\psi_n\}$ og diskret spektrum $\{E_n\}$, som sagt!

[Kontrollspørsmål: Hva er sammenhengen mellom p og k ?]

Vi normerer $\psi_n(x)$ ved å anta at partikkelen har energi E_n .
(Kan tenke oss at vi har målt energien, men ikke posisjonen.)

$$\Rightarrow 1 = \int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = A_n^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = A_n^2 \cdot \frac{1}{2} L$$

$$\Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \Rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Egenskaper, som gjelder (stort sett) generelt:

(22)

- Symmetri: Symmetrisk $V(x) \Rightarrow \text{symm. } |\Psi_n|^2 \Rightarrow \text{symm.}$
eller antisymm. $\Psi_n(x)$. [Mhp hvilken x-verdi her?]
S: $\Psi_1, \Psi_3, \dots$; AS: $\Psi_2, \Psi_4, \dots$
- Nullpunkter: Økende antall nullpunkter med økende energi.
Grunntilstanden har lavest mulig energi; og ingen nullpunkter.
(Nodelinjer i 2D; nodeplan i 3D.)
- Grensebetingelser: Inspeksjon av TUSL, $\frac{\Psi''}{\Psi} = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)$, gir
 $\Psi(x)$ kontinuerlig overalt
 $\Psi'(x)$ ——— " ———, unntatt der $V(x)$ gjør et
uendelig sprang: der gjør Ψ'' et ∞ sprang $\Rightarrow \Psi'$ er
diskontinuerlig $\Rightarrow \Psi$ har en "knekk"
- Krumningsegenskaper:
Klassisk tillatt område: $E \geq V \Rightarrow \frac{\Psi''}{\Psi} \leq 0 \Rightarrow \Psi$ krummer
mot x-aksen
Klassisk forbudt område: $E < V \Rightarrow \frac{\Psi''}{\Psi} > 0 \Rightarrow \Psi$ krummer
fra x-aksen
- Ortonormert funksjonssett (ortogonale og normerte):
$$\langle \Psi_n, \Psi_j \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x) \Psi_j(x) dx = \delta_{nj} = \begin{cases} 1 & ; n=j \\ 0 & ; n \neq j \end{cases}$$

Gjelder (kjemelig) generelt for løsninger av TUSL.

- Starttilstand og dens tidsutvikling:
Anta diskret spektrum.

$$\Psi(x, 0) = \sum_n c_n \psi_n(x) = \text{gitt bølgefunk. ved } t=0$$

$$\Rightarrow \Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar}$$

Utnytter at $\{\psi_n\}$ er ortonormert og finner

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x, 0) dx$$

Hvis $\Psi(x, 0)$ er normert, forblir $\Psi(x, t)$ normert, og

$$\sum_n |c_n|^2 = 1$$

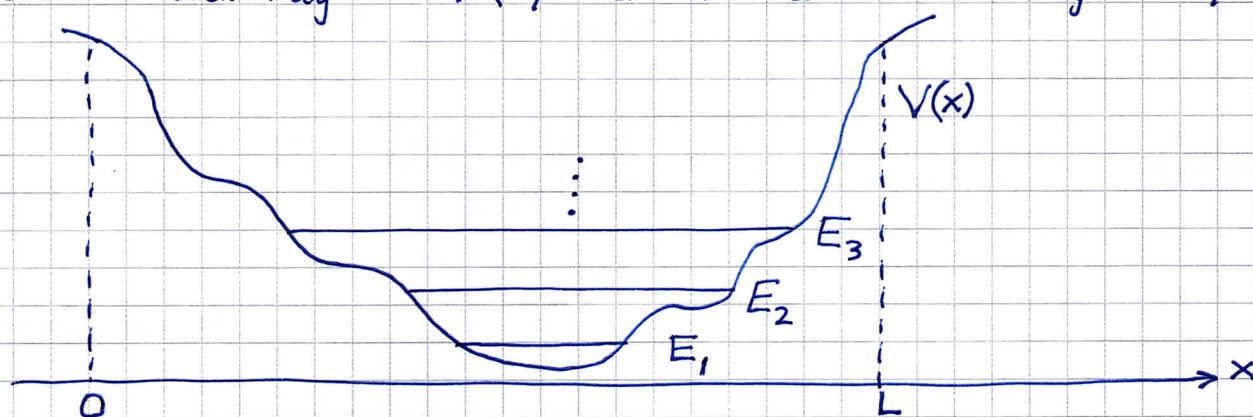
og

$|c_n|^2 =$ sanns. for å måle at partikkelen har energi E_n

(Målepostulatet)

Nummerisk løsning av TUSL

Med "vilkaarlig" $V(x)$ er TUSL ikke analytisk løsbart.

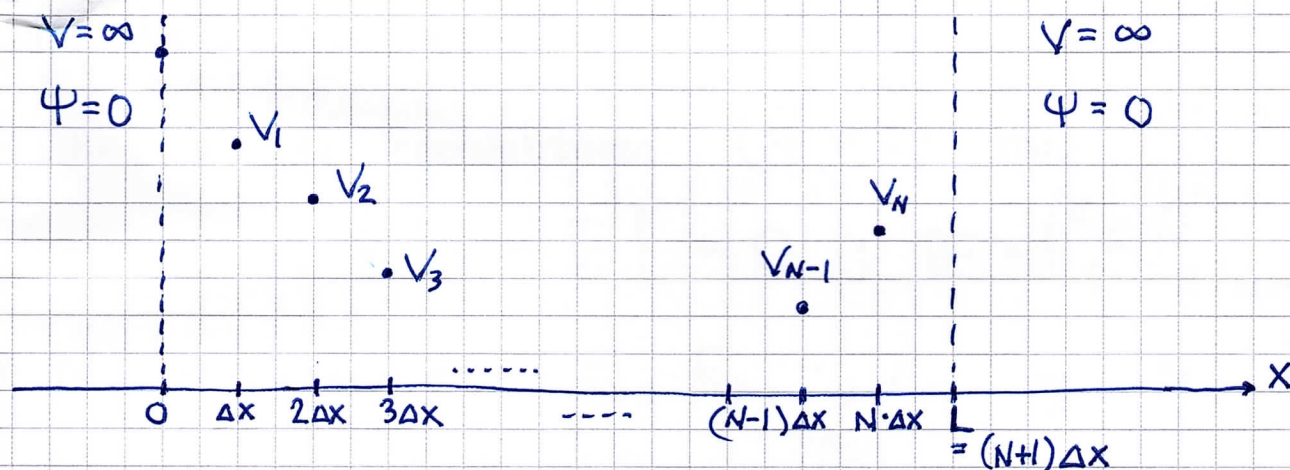


Vi "vet" at vi har bundne tilstander og diskret spektrum $E_1, E_2, E_3, \dots$ så lenge $E_j < V(\pm \infty)$.

For tilstander med $E_j \ll V(0)$ og $V(L)$ er $\Psi(x) \approx 0$ utenfor $(0, L)$

$\Rightarrow V \approx \infty$ for $x \leq 0$ og $x \geq L$

Diskretisering:



$$\Delta x = \frac{L}{N+1} ; \quad x_n = n \Delta x ; \quad V_n = V(x_n) ; \quad \Psi_n = \Psi(x_n)$$

$$\text{Grensebet: } V_0 = V_{N+1} = \infty \Rightarrow \Psi_0 = \Psi_{N+1} = 0$$

$$\psi_n'' \approx \frac{\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}}{(\Delta x)^2}$$

TUSL blir "differanseligninger":

$$-\frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} \{ \psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1} \} + V_n \psi_n = E \psi_n \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

Matriseform:

$$\begin{bmatrix} \epsilon + V_1 & -\frac{\epsilon}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\epsilon}{2} & \epsilon + V_2 & -\frac{\epsilon}{2} & 0 & & \\ 0 & -\frac{\epsilon}{2} & \epsilon + V_3 & -\frac{\epsilon}{2} & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & -\frac{\epsilon}{2} & \epsilon + V_{N-1} & -\frac{\epsilon}{2} \\ & & & & 0 & -\frac{\epsilon}{2} & \epsilon + V_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{bmatrix}$$

der $\epsilon = \hbar^2 / m (\Delta x)^2$

Dvs: $H \vec{\psi} = E \vec{\psi}$ med triagonal, reell, symmetrisk Hamiltonmatrise H .

Ikke-trivielle egenvektorer ($\vec{\psi} \neq 0$) hvis

$$\det \{ H - E \} = 0 ; E = \begin{pmatrix} E & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E \end{pmatrix}_{N \times N}$$

$\Rightarrow N$ energieigenverdier $E_1, E_2, \dots, E_N$ og N egenvektorer $\vec{\psi}^{(1)}, \vec{\psi}^{(2)}, \dots, \vec{\psi}^{(N)}$

Se docs.scipy.org/doc/scipy/reference/linalg.html
 og `eigh_tridiagonal` ("Solve eigenvalue problem for a
 real symmetric tridiagonal matrix").

$\Rightarrow$ egenverdier $E_1 < E_2 < \dots < E_N$

egenvektorene er ^{reelle og} normerte og ortogonale ("ortonormert"):

$$\sum_{n=1}^N \psi_n^{(j)} \psi_n^{(k)} = \delta_{jk} ; \quad \psi_n^{(j)} = \psi^{(j)}(x_n)$$

$$[cf \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^*(x) \psi_k(x) dx = \delta_{jk}]$$

og de danner et fullstendig sett:

$$\sum_{j=1}^N \psi_n^{(j)} \psi_l^{(j)} = \delta_{nl}$$

$$[\sum_j \psi_j^*(x') \psi_j(x) = \delta(x' - x) ; \text{ Diracs } \delta\text{-funksjon,} \\ \text{mer om den senere!}]$$

Starttilstand:

$$\Psi_k(0) = \sum_{j=1}^N c^{(j)} \psi_k^{(j)} ; \quad k = 1, 2, \dots, N ; \quad c^{(j)} = \sum_{k=1}^N \psi_k^{(j)} \Psi_k(0)$$

$$[cf \Psi(x, 0) = \sum_j c_j \psi_j(x)]$$

Tidsutvikling:

$$\Psi_k(t) = \sum_{j=1}^N c^{(j)} \psi_k^{(j)} e^{-iE_j t/\hbar}$$

$$[cf \Psi(x, t) = \sum_j c_j \psi_j(x) e^{-iE_j t/\hbar}]$$

Forventningsverdier:

$$\langle x \rangle(t) = \sum_{k=1}^N \Psi_k^*(t) x_k \Psi_k(t)$$

$$\langle p \rangle(t) = \sum_{k=1}^N \Psi_k^*(t) \hat{p} \Psi_k(t)$$

$$\hat{p} \Psi_k = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_k \approx \frac{\hbar}{i} \frac{\Psi_{k+1} - \Psi_k}{\Delta x} \quad (\text{f.eks})$$

Hartree Atomic Units

Vi setter $\hbar = e = a_0 = m_e = 1$.

Siden $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \cdot (\hbar^2/m_e e^2)$, er også $4\pi\epsilon_0 = 1$.

Energi: $E_h = \hbar^2/m_e a_0^2 = 1$ ($= 1$ hartree)

($=$ pot. energi $|V_1|$ i grunntilst. i H-atomet)

Eks: Hva er dybde og bredde i atomære enheter for en potensialbrønn med dybde 5 eV og bredde 40 nm?

Svar: $E_h = 1$ hartree tilsvarer 27.2 eV slik at

dybden er $\frac{5}{27.2} \approx \underline{\underline{0.184 \text{ hartree}}}$.

$a_0 = 1$ tilsvarer $0.529 \text{ \AA} = 0.0529 \text{ nm}$ slik at

bredden er $\frac{40}{0.0529} \approx \underline{\underline{756}}$

Postulatene : Basis for kvantemekanikken,
 slik Newtons lover er for klassisk mekanikk!

• Operatorpostulat:

Målbare størrelser i klassisk mekanikk representeres i QM av lineære operatører, som "konstrueres" ved at impulskoordinater p_j erstattes av operatører

$$\hat{p}_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j}$$

$$q_j = \text{posisjonskoordinat} \quad (\hat{q}_j = q_j)$$

Eks: Finn operatorene for kinetisk energi og dreieimpuls for en partikkel med masse m som beveger seg i yz -planet.

$$\text{Løsn: } K = \frac{1}{2m} (p_y^2 + p_z^2) \rightarrow \hat{K} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2)$$

$$\text{med } \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{og} \quad \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{Her har } \vec{L} \text{ kun en x-komp. } L_x = (\vec{r} \times \vec{p})_x$$

$$\Rightarrow L_x = y p_z - z p_y$$

$$\Rightarrow \hat{L}_x = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

- Tilstandspostulat:

$\Psi(\vec{r}, t)$ beskriver partikkelens tilstand og er bestemt av

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi$$

$$\text{med } \hat{H} = \hat{K} + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

- Forventningsverdi-postulat:

$\langle F \rangle = \int \Psi^* \hat{F} \Psi d^3r$ er middelværdien av F for mange målinger av F på identisk preparerte systemer

Eks: Partikkel i boks, "preparert" i en stasjonær tilst. $\Psi_n(x, t)$.
Hva er $\langle x \rangle$ og $\langle p \rangle$?

$$\text{Løsn: } \langle x \rangle = \int_0^L x |\Psi_n(x, t)|^2 dx = \int_0^L x |\Psi_n(x)|^2 dx = \underline{\underline{L/2}}$$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_0^L \Psi_n^*(x, t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_n(x, t) dx \\ &\sim \int_0^L \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{L}}_S \cdot \underbrace{\cos \frac{n\pi x}{L}}_{AS} dx = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

- Målepostulat:

Måling av F gir en av egenverdiene f_j , der

$$\hat{F} \Psi_j = f_j \Psi_j ; \Psi_j \text{ er egenfunkt. til } \hat{F}$$

Etter måling av F , med resultat f_j , har partikkelen i tilstanden Ψ_j ; dvs målingen påvirker systemet.

Eks: Anta starttilstand

(30)

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{6}} \Psi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_3(x)$$

Hva er sanns. for å måle energi E_1 ved $t_1 \geq 0$?

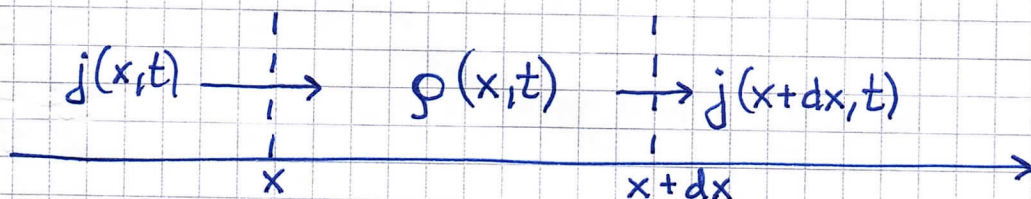
Hva er " " " " " " E_3 ved $t_3 > t_1$?

Svar: $P(E_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$, ved tid t_1 .

Etter t_1 er $\Psi(x,t) = \Psi_1(x)e^{-iE_1 t/\hbar}$, slik at

$P(E_3) = 0$, ved tid $t_3 > t_1$

Sannsynlighetsstrøm. Bevning av sannsynlighet



ρ øker hvis $j(x) > j(x+dx)$: $(\rho = \frac{dP}{dx} = |\Psi|^2)$

$$j(x) - j(x+dx) = \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho(x) dx \}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$$

Kont.lign. for
sanns. i 1D

3D: $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0}$

Bråk SL og skriv om $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ til $\frac{\partial}{\partial x}$ av "noe"
 $\Rightarrow$ dette "noe" må være $-j$, i følge kont.lign.

(31)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \{ \Psi^* \Psi \} = \dots \text{ se video H20...}$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} j$$

med $j = \text{Re} \left\{ \Psi^* \frac{\hat{p}}{m} \Psi \right\}$

Eks: Hva er j for

1) fri partikkel?

2) partikkel i stasjonær (bundet) tilstand?

Løsn: 1) $\Psi = e^{i(px - Et)/\hbar}$

$$\Rightarrow j = \text{Re} \left\{ e^{-i(px - Et)/\hbar} \frac{\hbar}{mi} \cdot \frac{ip}{\hbar} \cdot e^{+i(px - Et)/\hbar} \right\}$$

$$= p/m = \underline{\underline{v}}$$

Som ventet: Med $\rho = \Psi^* \Psi = 1$ overalt blir

$$j = \rho \cdot v = v$$

2) $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$, ^{alltid} med mulighet for å velge reell løsning $\psi(x)$ av TUSL

$$\Rightarrow j = \text{Re} \{ i * \text{reell størrelse} \} = \underline{\underline{0}}$$

Som ventet for stasjonær tilstand!