

TFY4215 Innføring i kvantefysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Øving 6.

Oppgave 1

$$\langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V(x) |\psi(x)|^2 dx = -m\beta^2/\hbar^2 = 2E,$$

siden deltafunksjonen i $V(x)$ bare "plukker opp" $|\psi(0)|^2 = m\beta/\hbar^2$. Riktig svar: D.

Oppgave 2

Argumentet til deltafunksjonen er null i $x = 2$, som inkluderes i integrasjonsområdet. Dermed blir integralet $2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 1$. Riktig svar: D.

Oppgave 3

Starttilstanden $\Psi(x, 0)$ er symmetrisk på intervallet $0 < x < L$. Dermed:

$$1 = 2 \int_0^{L/2} \Psi^2(x, 0) dx = 2A^2 \cdot (1/3) \cdot (L/2)^3 = A^2 L^3/12,$$

slik at $A = 2\sqrt{3}/L\sqrt{L}$. Riktig svar: B.

Oppgave 4

$\Psi(x, 0)$ ligner veldig på $\psi_1(x) = \sqrt{2/L} \sin(\pi x/L)$, så vi forventer at c_1 ikke er så mye mindre enn 1. De tre alternativene C, D og E er henholdsvis ca 0.14, 0.53 og 0.99, så vi mistenker at alternativ E er riktig.

La oss regne ut c_1 . Siden $\psi_1(x)$ er symmetrisk og reell, har vi

$$c_1 = 2 \int_0^{L/2} \psi_1(x) \Psi(x, 0) dx = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{L\sqrt{L}} \int_0^{L/2} x \sin(\pi x/L) dx.$$

Vi bruker delvis integrasjon og finner at integralet har verdien $(L/\pi)^2$, slik at $c_1 = 4\sqrt{6}/\pi^2$. Riktig svar: E.

Oppgave 5

$\psi_2(x)$ er antisymmetrisk på $(0, L)$, slik at $c_2 = 0$. Riktig svar: A.

Oppgave 6

Med c_1 bare litt mindre enn 1 blir $\langle E \rangle$ litt større enn E_1 . Riktig svar: B.

Oppgave 7

$$\langle p \rangle_{t=0} = \int_0^L \Psi^*(x, 0) \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \Psi(x, 0) dx = 0$$

siden integranden er antisymmetrisk. Symmetrien i problemet tilsier vel at dette ikke kan endre seg for $t > 0$ (!) Riktig svar: C.

Oppgave 8

$K = 200 \text{ keV} = 200 \cdot 10^3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 32 \text{ fJ}$. (f = femto = 10^{-15} .) Riktig svar: D.

Oppgave 9

Elektroner har hvileenergi $E_0 = m_e c^2 \simeq 0.51 \text{ MeV}$. Med kinetisk energi $K = 0.200 \text{ MeV}$ bør vi nok her regne relativistisk, og siden total energi, dvs summen av hvileenergi og kinetisk energi, er

$E = \gamma m_e c^2$, er kinetisk energi $K = (\gamma - 1)m_e c^2$. Her er $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Vi løser med hensyn på v og finner at $v = c \left[1 - (1 + K/m_e c^2)^{-2}\right]^{1/2} = 0.695 c$. Riktig svar: A.

Oppgave 10

$\lambda = h/p$ med (relativistisk) impuls $p = \gamma m v$. Med v fra forrige oppgave blir $\lambda = 2.5$ pm. Riktig svar: E.

Løsning OPPGAVE 12

a. ♠

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx &= f(0) \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) g(x) dx &= g(c); \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) (Ax + B) dx &= B; \\
 \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x - a) + \delta(x - b)] f(x) dx &= f(a) + f(b); \\
 \int_{-1}^4 [\delta(x - 1) + \delta(x + 3)] g(x) dx &= g(1); \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x) f(x) dx &= \frac{1}{2} f(0); \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(3x - 6) f(x) dx &= \frac{1}{3} f(2); \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixa} dx &= \delta(a); \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixa} dx &= \delta(-a) = \delta(a); \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixa} da &= \delta(x); \quad (\text{NB! Integrasjon over } a) \\
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{if_1 f_2} df_1 &= \delta(f_2); \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') \delta(x - x'') dx &= \delta(x' - x'') \quad .
 \end{aligned}$$

b. ♠ Her er vel oppgaveteksten selvforklarende.