

Plancks strålingslov

- Utgangspunkt: Akselererte ladninger emitterer elektromagnetisk stråling; dette følger av Maxwells ligninger. Mer om det i TFY4240 E.m.teori.

- Kvantehypotesen (Planck, 1900): Energien i EM stråling er kvantisert,

$$E_n = n \cdot h\nu \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ν = frekvensen

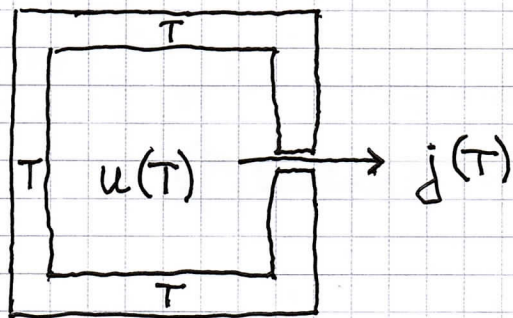
$$h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad ; \quad \text{i dag eksakt:}$$

$$h \equiv 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{siden 20.05.2019})$$

- Stant legeme absorberer all innkommende stråling.

Emitterer like mye energi som det absorberer i termisk likevekt, dvs $T = \text{konstant}$.

- Modellsystem: Metallboks med hulrom og liten åpning, i termisk likevekt.



$u(T)$ = strålingsenergi pr volumenhett i hulrommet (J/m^3)

$j(T)$ = utstrålt energi pr tids- og pr flateenhet (W/m^2)

$$[j(T) = \frac{c}{4} \cdot u(T)]$$

- Frekvens- og bølglængdefordeling:

$$j(\nu) = \int dj = \int_0^{\infty} d\nu \frac{dj}{d\nu}$$

evt. $j(\nu) = \int_0^{\infty} d\lambda \frac{dj}{d\lambda}$

Resultat:

$$\frac{dj}{d\nu} = \frac{2\pi h \nu^3 / c^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

$$\frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2 / \lambda^5}{\exp(hc / \lambda k_B T) - 1}$$

$$c \equiv 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad (\text{siden 1983})$$

$$k_B \equiv 1.380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (\text{Boltzmanns konstant})$$

- Ingredienser i udledningen:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{1}{V} \frac{dU}{d\nu} = \frac{1}{V} \cdot \langle E \rangle \cdot \frac{dN}{d\nu}$$

$\langle E \rangle$ = midlere energi pr svingemode

$\frac{dN}{d\nu}$ = antall svingemoder pr frekvensenhet
("tilstandstettheten")

(3)

- Svingemoder i kubisk h lrom ($V = L^3$)
er stående EM bølger som oppf ller

$$FY1003 \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Maxwells ligninger (f.eks. } \nabla \cdot \vec{E} = 0) \\ \bullet \text{ Grensebetingelser for el. felt } \vec{E} \text{ og magn.felt } \vec{B} \\ \text{ på de 6 metallveggene (f.eks. } \vec{E}_{||} = 0) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi \nu^2 V}{c^3}$$

- Midlere energi pr svingemode:

$$\text{Klassisk: } \langle E \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T = k_B T$$

pga ekvipartisjonspriippet: Hvert kvadratiske ~~ledd~~ ledd i energifunksjonen bidrar med $\frac{1}{2} k_B T$ til midlere energi.

$$\text{Her: } u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

$\Rightarrow$ Rayleigh - Jeans lov:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot k_B T$$

OK for lave frekvenser, men gir "ultrafiolett-katastrofen":

$$u(T) = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \int_0^\infty d\nu \nu^2 = \infty \quad !!$$

Eknipartisjonsprinsippet: (TFY4165? TFY4230)

Anta energi $E(s) = A \cdot s^2$ (dvs kvadratisk i s)

Da er $dP = G \cdot \exp(-E/k_B T) \cdot ds$ sannsynligheten for at energien (til en partikkel eller svingemode) ligger mellom $E(s)$ og $E(s+ds)$.

Normering av P , dvs $\int dP = 1$: $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right)$

$$G \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{A \cdot s^2}{k_B T}\right) ds = 1$$

$$= \sqrt{\pi k_B T / A}$$

$$\Rightarrow G = \sqrt{\frac{A}{\pi k_B T}}$$

$$\langle E \rangle = \int E \cdot dP = \int_{-\infty}^{\infty} A s^2 \sqrt{\frac{A}{\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{A s^2}{k_B T}\right) ds$$

$$= \frac{k_B T}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx}_{= \sqrt{\pi} / 2}$$

$$\text{dvs: } \langle E \rangle = \langle A s^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

• $\langle E \rangle$ når $E_n = n h \nu$; $n = 0, 1, 2, \dots$

⑤

Vi må summere (over mulige n -verdier) i stedet for å integrere (over kontinuerlige frihetsgrader).

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot p_n \quad ; \quad p_n \sim \exp\left(-\frac{E_n}{k_B T}\right)$$

Normering av sannsynlighet : $\sum_n p_n = 1$

$\Rightarrow$ Skriver $p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$; $\beta = 1/k_B T$

og regner ut normeringsfaktoren $1/Z$:

$$\sum_n p_n = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} = 1$$

$\Rightarrow Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{partisjonsfunksjonen}$

Med $E_n = n \cdot h \nu$:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-h \nu \beta n} = 1 + e^{-h \nu \beta} + e^{-2 h \nu \beta} + \dots$$

$$= 1 + x + x^2 + \dots \quad (\text{med } x = e^{-h \nu \beta})$$

$$= \frac{1}{1-x} = [1 - \exp(-h \nu \beta)]^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z} \left(-\frac{d}{d\beta}\right) \sum_n e^{-\beta E_n} = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta}$$

$$= -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx} \frac{dx}{d\beta} = -(1-x) \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-h \nu) x$$

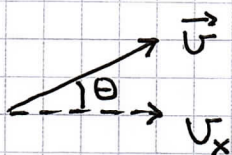
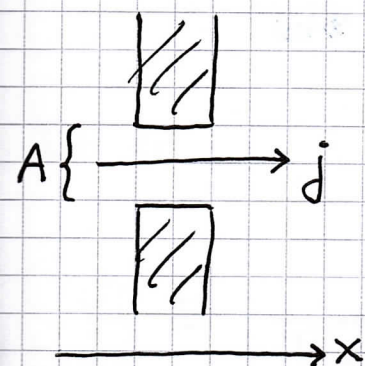
$$= \frac{h \nu x}{1-x} = \frac{h \nu}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{h \nu}{\exp(h \nu \beta) - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle = \frac{8\pi h \nu^3 / c^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (6)$$

• Fra u til j :

$$j = \frac{1}{2} \left\langle \frac{dU}{A \cdot dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{u \cdot dV}{A \cdot dt} \right\rangle$$

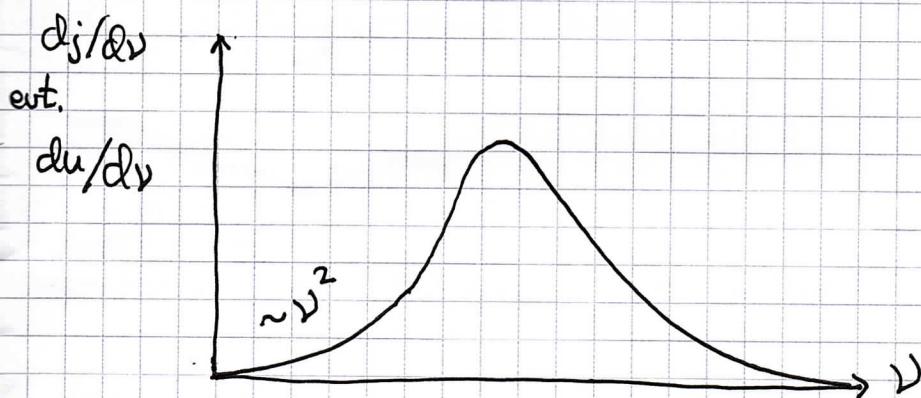
$$= \frac{1}{2} \left\langle \frac{u \cdot A \cdot dx}{A \cdot dt} \right\rangle = \frac{1}{2} u \cdot \langle v_x \rangle$$



$$|\vec{u}| = c$$

$$v_x = c \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow \langle v_x \rangle = \frac{c}{2} \Rightarrow j = \frac{c}{4} u \quad \text{og} \quad \frac{dj}{d\nu} = \frac{c}{4} \frac{du}{d\nu}$$



- Klassisk grense av Plancks strålingslov:

$$k_B T \gg h\nu$$

dvs: Termisk energi mye større enn oppsplittingen mellom de kvantiserte energiene. (Dvs: Essensielt kontinuerlig energifordeling.)

Da er $\exp(h\nu/k_B T) \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$ slik at

$$\frac{dj}{d\nu} \approx \frac{2\pi h \nu^3 / c^2}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = \frac{2\pi k_B T}{c^2} \cdot \nu^2$$

$$\text{evt. } \frac{du}{d\nu} = \frac{4}{c} \frac{dj}{d\nu} = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \cdot \nu^2$$

dvs Rayleigh-Jeans lov!

- Eksamen og Plancks strålingslov:

Kun 1 oppgave i "nyere tid"!

(Som egentlig handler om Wiens forskyvningslov...!)

Kanskje noe mer i år...?

(8)

- Oppg: Vis at $j(T) = \sigma T^4$ og bestem σ .
(Stefan - Boltzmanns lov)

Løsn: $j(T) = \int_0^\infty d\lambda \frac{dj}{d\lambda}$; $\frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}$

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T} ; \quad dx = \frac{hc}{k_B T} \cdot \left(-\frac{d\lambda}{\lambda^2}\right)$$

$$\Rightarrow j(T) = \int_0^\infty \underbrace{dx \cdot \left(-\frac{k_B T}{hc}\right) \cdot \left(\frac{hc}{k_B T x}\right)^2}_{= d\lambda} \cdot \frac{2\pi hc^2 \cdot (k_B T x / hc)^5}{\exp(x) - 1}$$

$$= 2\pi hc^2 \cdot \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^4 \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{= \pi^4/15}$$

$$= \underbrace{\frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}} \cdot T^4$$

$$= \sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

- Oppg: Vis at $dj/d\lambda$ er maksimal når $(x-5)e^x + 5 = 0$

Løsn: $dj/d\lambda = \text{konst.} \cdot f(y)$; $f(y) = y^{-5} (e^{1/y} - 1)^{-1}$; $y = \frac{\lambda k_B T}{hc}$

$$\frac{df}{dy} = 0 \Rightarrow -5y^{-6} (e^{1/y} - 1)^{-1} + y^{-5} (-1) (e^{1/y} - 1)^{-2} \cdot e^{1/y} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = 0$$

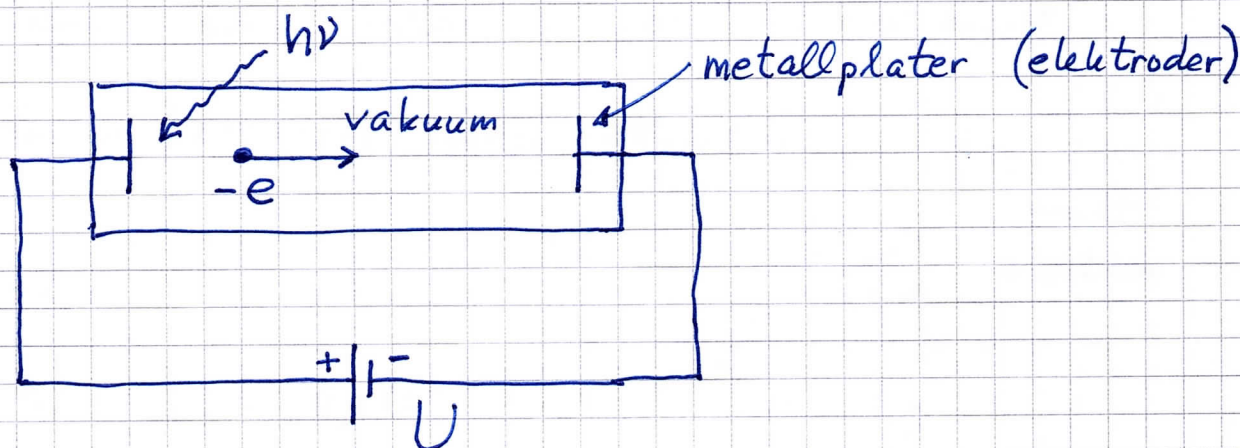
$$\Rightarrow y^{-6} (e^{1/y} - 1)^{-2} \left\{ \frac{1}{y} e^{1/y} - 5 e^{1/y} + 5 \right\} = 0$$

$$\overset{x=1/y}{\Rightarrow} (x-5)e^x + 5 = 0 ; \quad x = hc/\lambda k_B T$$

$$\Rightarrow x \approx 4.965 \Rightarrow \lambda_m \cdot T = \frac{hc}{k_B x} \approx 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Wien's forskyvn. lov

Fotoelektrisk effekt (1905)



W = minste energi påkrevd for å løsrive elektroner fra metallelektrodene

= frigjøringsarbeid (work function)

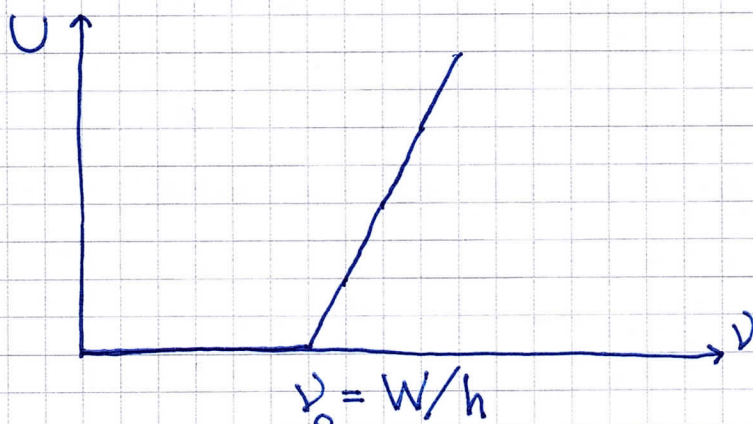
$h\nu < W \Rightarrow$ ingen elektroner rives løs

$h\nu > W \Rightarrow$ elektroner med kin. energi $K = h\nu - W$

Motspenning (Terskelspanning) $U = K/e$

for å hindre strøm i kretsen

$$U(\nu) = \frac{K}{e} = \frac{h\nu - W}{e} = \frac{h}{e} (\nu - \nu_0)$$



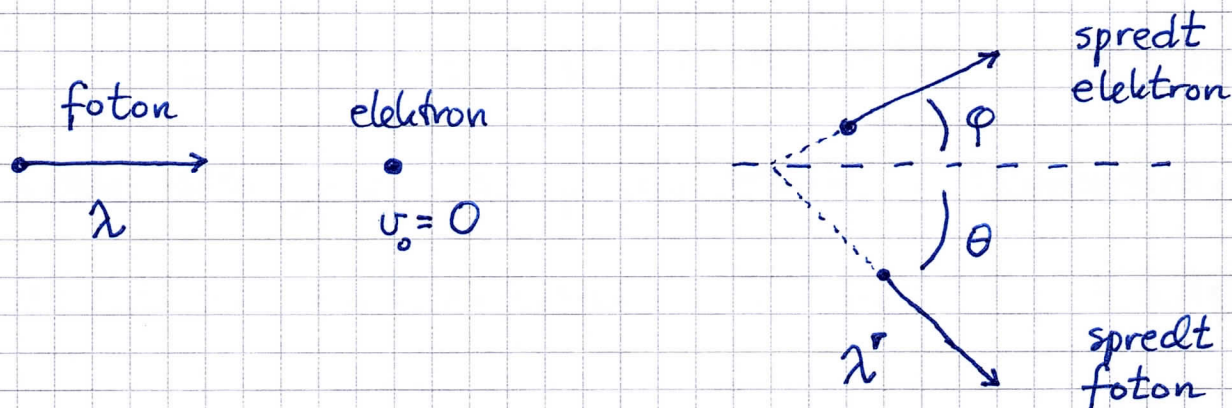
Comptoneffekt

(1923)

(10)

Kollisjon mellom foton og partikkel med masse

(massiv partikkel; f.eks. elektron)



Relativistisk mekanikk:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} ; \quad E = \gamma mc^2 = E_0 + K$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} ; \quad E_0 = mc^2$$

$$K = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2 \quad \left(\begin{array}{l} v \ll c \\ \approx \frac{1}{2}mv^2 \end{array} \right)$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

Foton:

$$m = 0 ; \quad E = h\nu \quad \text{og} \quad E = pc \quad \Rightarrow \quad p = \frac{h\nu}{c}$$

$$\text{Bølge: } c = \lambda \cdot \nu \quad \Rightarrow \quad p = h/\lambda$$

~~~~~  
Bruker bevaring av energi og impuls og får

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$



## Bohrs atommodell (1913)

(11)

Bohr kjente til:

- Balmer-serien for H-atomet:

$$\frac{1}{\lambda_n} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n=3,4,5,6; \quad R \approx 10^7 \text{ m}^{-1}$$

- Liten atomkjerne med positiv ladning (Rutherford, 1911)
- Kvantisert strålingsenergi (Planck 1900; Einstein 1905)

Bohr antok derfor:

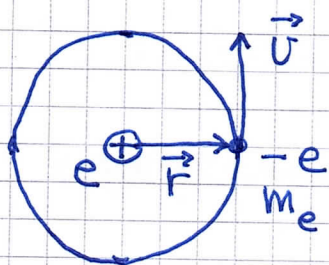
- Elektronet i H-atomet beveger seg i klassiske baner rundt kjernen, med bestemte energier, i såkalte stasjonære tilstander.
- Elektronet kan gjøre kvantesprang mellom de stasjonære tilstandene via absorpsjon eller emisjon av et strålingskvant (foton).
- Måtte anta kvantisert dreieimpuls (for å få energiverdier i samsvar med Balmer-serien, og Lyman-serien  $\lambda_n^{-1} = R (1/1^2 - 1/n^2); n=2,3,4,\dots$ )

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = n\hbar; \quad n=1,2,3,4,\dots$$

$$\hbar \equiv h/2\pi \approx 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$



(12)



$$F = m_e a$$

$$a = v^2 / r$$

$$F = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2 ; \quad V = -e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad \Rightarrow E = K + V = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Antagelsen  $L_n = r \cdot m_e v = n\hbar$  gir nå

$$r_n = n^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2 = n^2 \cdot a_0 \approx n^2 \cdot 0.529 \text{ Å}$$

$$E_n = -m_e e^4 / 32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2 \approx -13.6 \text{ eV} / n^2$$

$$= -\frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 / n^2$$

$$\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c \approx 1/137 \quad (\text{finstrukturkonstanten})$$

Ioner med ett elektron:  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ ,  $\text{Be}^{3+}$ , .....

$$\Rightarrow e \rightarrow Ze \Rightarrow F = Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2 \text{ etc.}$$

$$\Rightarrow e^2 \rightarrow Ze^2 ; \quad e^4 \rightarrow (Ze^2)^2 = Z^2 e^4$$

$$\Rightarrow r_n = n^2 a_0 / Z$$

$$E_n = -13.6 \text{ eV} \cdot Z^2 / n^2 = -\frac{1}{2} (Z\alpha)^2 m_e c^2 / n^2$$

Dvs: Ikke-relativistisk OK for små Z-verdier



Partikkelbølger (1923)Bølgeegenskaper :  $\lambda$  og  $\nu$ 

Sammenhenger for EM bølger / fotoner :

$$E = pc = h\nu \quad ; \quad c = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \quad \text{og} \quad \nu = \frac{E}{h}$$

de Broglie : "Må (!?) også gjelde for massive partikler!"

Senere grundig verifisert eksperimentelt.

(Interferens, diffraksjon.)

Ideell gass : Fordeling av impulsverdier; naturlig valg for "karakteristisk" impuls

$$\begin{aligned} p_{\text{rms}} &= \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \sqrt{\langle p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \rangle} \\ &= \sqrt{2m \cdot \langle K_{\text{trans}} \rangle} \\ &= \sqrt{2m \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T} \quad (\text{EPP}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p_{\text{rms}}} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

= partiklenes termiske de Broglie - bølgelengde



Eks (30.05.18/5)

(14)

Elektronmikroskop (TEM).  $K = 300 \text{ keV}$ .  $p = ?$

Løsning: Ikke-relativistisk først.

$$p \cdot c = \sqrt{2m_e K} c = 8.9 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 554 \text{ keV}$$

Men: Siden  $E_0 = m_e c^2 \approx 511 \text{ keV}$ , har vi her ikke  $K \ll E_0$ , så vi bør nok regne relativistisk.

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - E_0^2} = \sqrt{(m_e c^2 + K)^2 - (m_e c^2)^2} \\ &= \sqrt{(511 + 300)^2 - 511^2} \text{ keV} = \underline{\underline{630 \text{ keV}}} \end{aligned}$$

Gir elektroner med kort bølgelengde,

$$\lambda = h/p = 1.96 \text{ pm}$$

og mulighet for avbildning på atomær skala.

Eks (30.05.18/2)

Gass med  $\text{Na}_2$ -molekyler (dimere) ved  $770^\circ\text{C}$ ;  $\lambda = ?$

Løsning:  $m \approx 2 \cdot 23u = 46 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $T = 1043 \text{ K}$

$$\Rightarrow \lambda = h / \sqrt{3mk_B T} = 1.1 \cdot 10^{-11} \text{ m} = \underline{\underline{0.11 \text{ \AA}}}$$

Eks (03.06.19/1)

H-atom, overgang fra  $n=9$  til  $n=6$ ,  $\lambda$  for emittert foton?

$$\text{Løsning: } \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_9 - E_6}$$

Lurt med  $hc = 1237 \text{ eV} \cdot \text{nm}$  her;

$$\lambda = \frac{1237 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{-13.6 \text{ eV}/81 + 13.6 \text{ eV}/36} = 5894 \text{ nm} \approx 6 \mu\text{m}$$