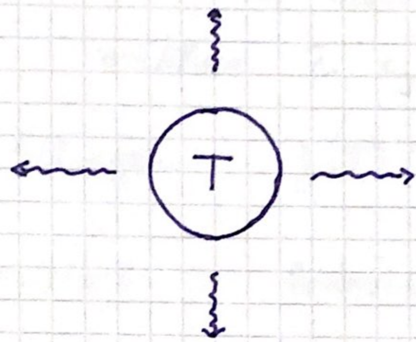
Plancks strålingslov

[PCH 1.2; DJG 5.45; IØ 1.1]

Legeme med temperatur T sender ut (emitterer) energi i form av elektromagnetiske (EM) bølger:



Eks: Sola

$T \approx 5800$ K

$j(T)$ = utstrålt effekt pr flateenhet (W/m^2)

Skyldes akselererte ladninger i legemet (elektroner og protoner); disse vil ifølge Maxwells ligninger sende ut EM bølger.

Josef Stefan (1877): $\quad j \sim T^4$
(og lab TFY4165)
(og Ludwig Boltzmann; termodynamisk teori 1884)

Emittert intensitet $j(T)$ består av ulike bølgelengder λ, evt ulike frekvenser $\nu = c/\lambda$, med

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s},$$

lysfarten i vakuum.

Bølgelengdefordelingen : $j(T) = \int_0^\lambda d\lambda \, \frac{dj}{d\lambda}$

$\frac{dj}{d\lambda}$ = intensitet pr bølgelengdeenhet $\left(\frac{W}{m^2 \cdot m}\right)$

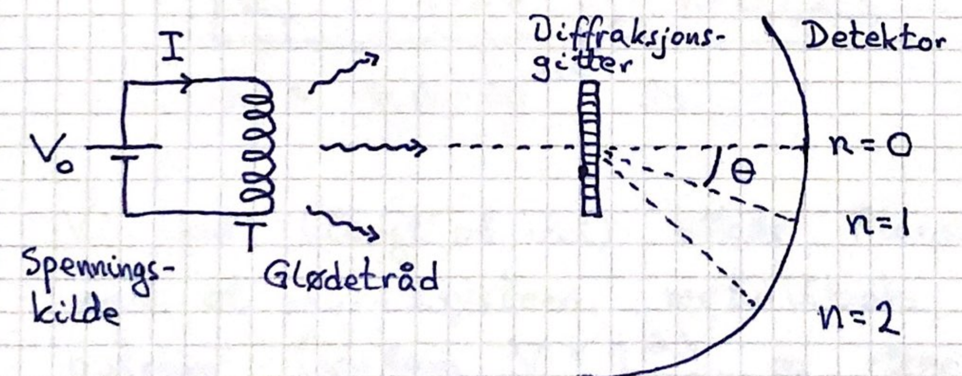
$\Rightarrow \frac{dj}{d\lambda} \cdot d\lambda$ = intensitet med bølgelengder mellom λ og $\lambda + d\lambda$

Frekvensfordelingen : $j(T) = \int_0^\infty d\nu \, \frac{dj}{d\nu}$

$\frac{dj}{d\nu}$ = intensitet pr frekvensenhet $\left(\frac{W}{m^2 \cdot Hz}\right)$

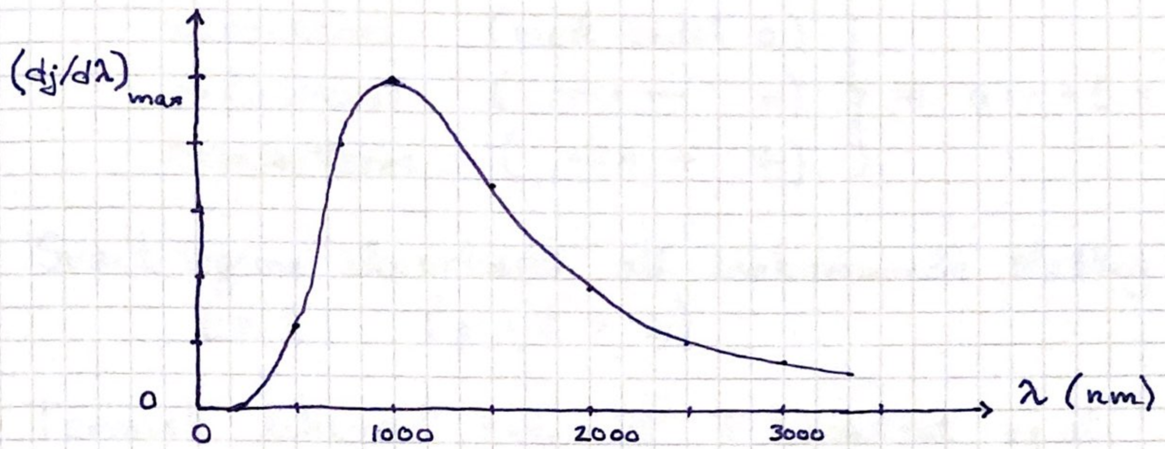
$\Rightarrow \frac{dj}{d\nu} \cdot d\nu$ = intensitet med frekvenser mellom ν og $\nu + d\nu$

Både $dj/d\lambda$ og $dj/d\nu$ er funksjoner av hhv (λ, T) og (ν, T). Kan måles :



Med f.eks. 1. orden (n=1) : Mål $dj/d\lambda$ vs θ.
Deretter gir $\lambda = d \sin\theta$ $dj/d\lambda$ som funksjon av λ.
(d = spalteavstanden i diffraksjonsgitteret)

"Typisk" resultat (shimadzu.com, halogenlampe med wolframtråd, $T = 3000$ K):



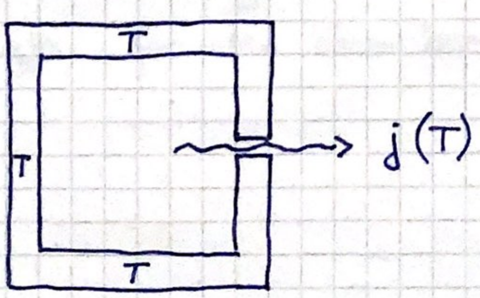
Max Planck (1900, NP 1918) fikk samsvar med slike eksperimentelle kurver med sin <u>kvantehypotese</u>:

EM stråling med frekvens ν har bare energiene

$$\boxed{E_n = n \cdot h\nu \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

$$h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Vi skal (langt på vei) utlede Plancks strålingslov med et modellsystem, metallboks med kubisk hulrom (volum $V = L^3$), og etter hvert med et lite hull i veggen:



Dette er (praktisk talt) et <u>svart legeme</u>.

Hva er et svart legeme?

EM stråling som treffer et legeme kan

$$\left.\begin{array}{ll} \text{absorberes} & (\text{med andel } a) \\ \text{reflekteres} & (\text{—"— } r) \\ \text{transmitteres} & (\text{—"— } t) \end{array}\right\} \Rightarrow a + r + t = 1$$

Svart legeme absorberer all innkommende stråling:

$a = 1 \quad (r = t = 0)$

Termisk likevekt betyr at T = konstant og at legemets indre energi er konstant. Da må legemet emittere like mye energi som det absorberer (for enhver bølgelengde). Dvs, et svart legeme har emisjonsevne $e = a = 1$.

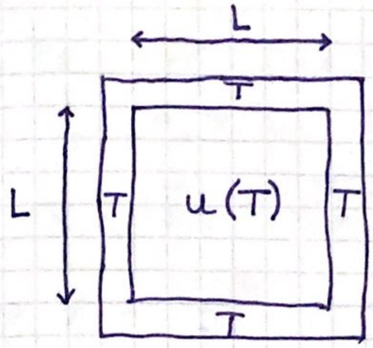
Sammenhengen $e = a$ må gjelde i termisk likevekt også for reelle legemer, med absorpsjonsevne $a < 1$.

Eksempler:

Polert metallplate $a \approx 0.1$

Malt overflate $a \gtrsim 0.9$ (alle farger)

Hulrom med liten åpning inn/ut: $a \approx 1$, fordi stråling inn har liten sjanse for å slippe ut igjen før den absorberes i hulrommets vegger.



$u(T)$ = strålingsenergi pr volumenhet i hulrommet, i termisk likevekt med veggene (volum $V = L^3$)

$$u(T) = \int_0^\infty d\nu \, \frac{du}{d\nu} \quad ; \quad \frac{du}{d\nu} = \text{hulromsenergi pr volum- og frekvensenhet}$$

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{1}{V}\frac{dU}{d\nu} = \frac{1}{V}\,\frac{\langle E \rangle \cdot dN}{d\nu}$$

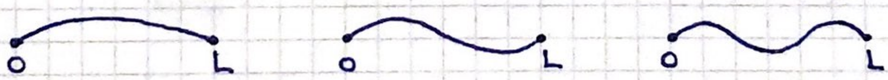
$\langle E \rangle$ = midlere energi pr "svingemode"

dN = antall svingemoder mellom ν og $\nu + d\nu$

$\frac{dN}{d\nu}$ = svingemoder pr frekvensenhet = tilstandstettheten

Svingemoder: Stående EM bølger som oppfyller Maxwells ligninger (i vakuum, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ osv) inkl. grensebetingelser for elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetfelt $\vec{B}$ på hulrommets vegger.

Analogt med stående bølger på streng med lengde L:



$$\lambda = 2L,\ L,\ \tfrac{2}{3}L, \ldots \quad \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{L},\ \frac{2\pi}{L},\ \frac{3\pi}{L}, \ldots$$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v \cdot k}{2\pi} = \frac{v}{2L},\ \frac{v}{2L}\cdot 2,\ \frac{v}{2L}\cdot 3, \ldots$$

= strengens resonansfrekvenser (v = bølgefarten)

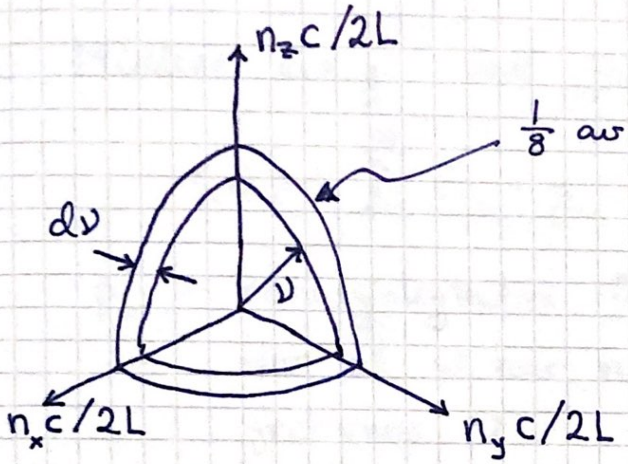
For vårt hulrom: ⑥

$k_x = n_x \pi / L, \quad k_y = n_y \pi / L, \quad k_z = n_z \pi / L \;; \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots$

$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$

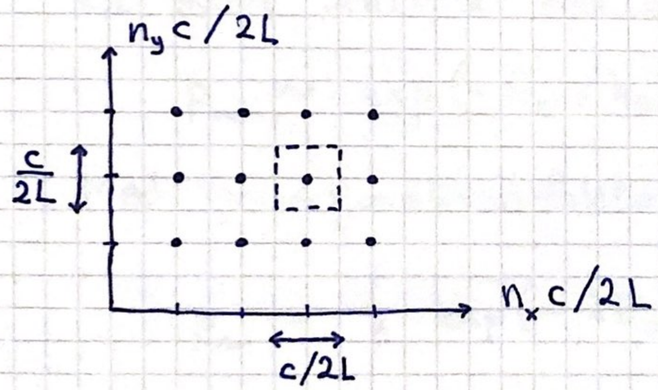
$\Rightarrow \nu = \frac{c \cdot k}{2\pi} = \frac{c}{2L} \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$

= svingemodenes frekvenser, tilsvarer punkter i rom med akser $n_x c/2L$, $n_y c/2L$, $n_z c/2L$



$\frac{1}{8}$ av kuleskall, volum:

$$dV_\nu = \frac{1}{8} \cdot 4\pi \nu^2 \cdot d\nu$$



En frekvensverdi pr volum $(c/2L)^3$ i dette frekvensrommet

EM bølger er transversale bølger ($\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$) med to uavhengige polarisasjonsretninger

$\Rightarrow$ 2 tilstander pr volum $(c/2L)^3$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dV_\nu} = \frac{2}{(c/2L)^3} = \frac{16\,V}{c^3} = \frac{dN}{\frac{\pi}{2} \nu^2 \, d\nu}$$

Dermed:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \langle E \rangle$$

Som ventet er antall tilstander pr frekvens- og volumenhet,

$$\frac{dN}{V \cdot d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3},$$

uavhengig av det valgte modellsystemet.

Midlere energi ved frekvens ν er (selvsagt !?)

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot p_n \quad ; \quad E_n = n \cdot h\nu$$

p_n = sannsynligheten for at $E = E_n = n \cdot h\nu$, dvs at vi har n "strålingskvant" med frekvens ν

Et svært sentralt resultat fra statistisk mekanikk:

$$p_n \sim \exp(-E_n / k_B T) \quad ; \quad \text{Boltzmann-faktoren}$$

Med proporsjonalitetsfaktoren inkludert:

$$p_n = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_n) \quad ; \quad \beta \equiv 1/k_B T$$

k_B = Boltzmanns konstant

$\equiv 1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K (siden 20.05.19)

Total sannsynlighet er alltid lik 1, dvs

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = 1$$

Dermed:

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{partisjonsfunksjonen}$$

(evt. tilstandssummen, tysk: Zustandsum)

[Kommentar: Kvalitativt rimelig at $p(E)$ øker med økende temperatur. Da er muligheten større for å få tilført energi fra omgivelsene.]

Med $E_n = nh\nu$ blir det lett å regne ut Z:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta h\nu n) = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

med $x = \exp(-\beta h\nu)$. Midlere energi er da:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z}\left(-\frac{d}{d\beta}\right) \sum_n e^{-\beta E_n}$$

$$= -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\beta} = -\frac{d}{d\beta} \ln Z = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1-e^{-\beta h\nu}}$$

$$= +\frac{d}{d\beta} \ln\left(1 - e^{-\beta h\nu}\right)$$

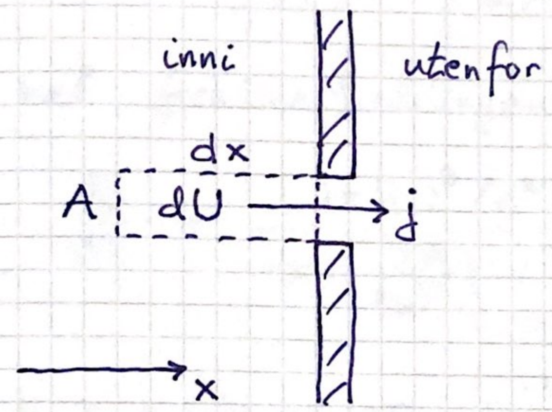
$$= \left(1 - e^{-\beta h\nu}\right)^{-1} \cdot \left(-e^{-\beta h\nu}\right) \cdot (-h\nu)$$

$$= \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

Dermed er hulromsenergitettheten pr frekvensenhet:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

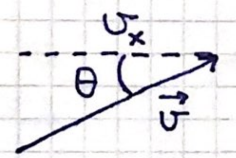
Finner deretter emittert intensitet j gjennom et lite hull i veggen:



$dU = u \cdot dV = u \cdot A \cdot dx$

= strålingsenergi i volumet $dV = A \cdot dx$ like innenfor hullet; 50% på vei mot høyre

$$\Rightarrow j = \frac{1}{2}\left\langle \frac{dU}{A \cdot dt} \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \frac{u\,A\,dx}{A\,dt} \right\rangle = \frac{u}{2}\left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle = \frac{u}{2}\langle v_x \rangle$$



$|\vec{v}| = c \quad ; \quad v_x = c \cdot \cos\theta$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\langle v_x \rangle = \frac{\iint v_x \, d\Omega}{\iint d\Omega} \quad ; \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= c \cdot \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta} = \frac{c}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta = \Big|_0^{\pi/2} (-\cos\theta) = 1 \\ \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \Big|_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow j = \frac{c}{4} u \quad \text{og dermed} \quad \frac{dj}{d\nu} = \frac{c}{4} \frac{du}{d\nu}$$

Konklusjon: Strålingsintensitet fra svart legeme med absolutt temperatur T er

$$j(T) = \int_0^\infty d\nu \, \frac{dj}{d\nu}$$

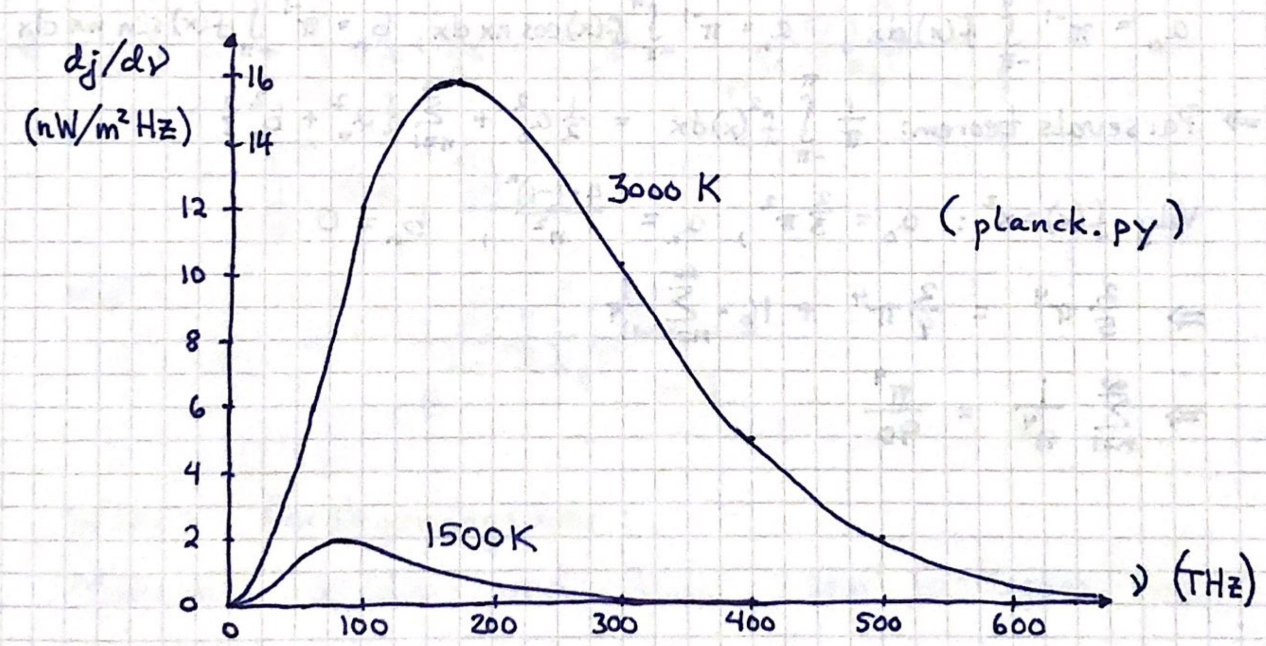
med frekvensfordelingen

$$\frac{dj}{d\nu} = \frac{2\pi h \nu^3 / c^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$ Plancks strålingslov

$h \equiv 6.62607015 \cdot 10^{-34}$ Js (Plancks konstant)

$c \equiv 299792458$ m/s (Lysfarten i vakuum)

$k_B \equiv 1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K (Boltzmanns konstant)



(planck.py)

- Ser at $j(T)$ øker raskt når T økes
- Ser at ν som gir max $dj/d\nu$ øker med T

Dette er hhv Stefan-Boltzmanns lov og Wiens forskyvningslov

Stefan - Boltzmanns lov:

Smal sak nå å vise at $j(T) \sim T^4$. Med dimensjonsløs $x = h\nu/k_B T$ er $\nu^3 d\nu = (k_B T/h)^4 x^3 dx$

$$\Rightarrow j(T) = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{=\pi^4/15}$$

$$\Rightarrow j(T) = \sigma T^4 \;; \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

Bølgelengdefordelingen:

Fra $c = \lambda\nu$ følger $\nu = c/\lambda$ og $d\nu = (-c/\lambda^2)\, d\lambda$

$$\Rightarrow j(T) = -\int_\infty^0 d\lambda \cdot \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{(c/\lambda)^3}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

$$= \int_0^\infty d\lambda \, \frac{dj}{d\lambda}$$

med
$$\frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

Wiens forskyvningslov:

Maksimal $dj/d\lambda$ ved λ_{max}, som fastlegges ved

$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dj}{d\lambda}\right) = 0$. Gir: $\lambda_{max} \cdot T \approx 2898\ \mu m \cdot K$

Tilsvarende: Max $dj/d\nu$ ved ν_{max} gitt ved

$\frac{d}{d\nu}\left(\frac{dj}{d\nu}\right) = 0$. Gir $\nu_{max}/T \approx 5.876 \cdot 10^{10}\ Hz/K$

Klassisk grense og ekvipartisjonsprinsippet:

Hvis $k_B T \gg h\nu$, dvs termisk energi mye større enn avstanden mellom de kvantiserte energinivåene, er strålingsspekteret praktisk talt kontinuerlig. Da forsvinner effekter knyttet til kvantisering.

$$h\nu \ll k_B T \quad \Rightarrow \quad e^{h\nu/k_B T} - 1 \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1 = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dj}{d\nu} \approx \frac{2\pi h \nu^3/c^2}{h\nu/k_B T} = \frac{2\pi k_B T}{c^2} \cdot \nu^2$$

$$\text{og} \quad \frac{du}{d\nu} \approx \frac{8\pi k_B T}{c^3} \cdot \nu^2 \qquad \text{(Rayleigh-Jeans lov)}$$

Vi hadde (s. 5) $\frac{du}{d\nu} = \frac{1}{V} \frac{\langle E \rangle \cdot dN}{d\nu}$, og fra elmag (FY1003) er energitettheten i et EM felt

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Ekvipartisjonsprinsippet (mer om det i TFY4165):
Et kvadratisk ledd i energifunksjonen gir et bidrag $\frac{1}{2} k_B T$ til midlere energi, pr partikkel eller (som her) svingemode.

Her: 2 kvadratiske ledd, $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ og $\frac{1}{2\mu_0} B^2$, slik at $\langle E \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\nu} = \frac{1}{V} \frac{\langle E \rangle \cdot dN}{d\nu} \overset{\text{s. 7}}{=} \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot \langle E \rangle = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \cdot \nu^2,$$

det samme som med Planck i grensen $h\nu / k_B T \ll 1$.

Bra: Klassisk fysikk og kvantefysikk "henger sammen"!