Usikkerhet og uskarphetsrelasjoner

[PCH 4.5 ; DJG 1.6, 3.4 ; IØ 2.3.c og øving 1 og 4]

Standardavvik :

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$$

= Root Mean Square Deviation (RMSD)

Forenkling :

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}$$

For to målbare fysiske størrelser A og B :

$$\boxed{\Delta A \cdot \Delta B \geq \left| \frac{1}{2} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|}$$

To størrelser med operatorer som ikke kommuterer, kan ikke ha skarpe verdier samtidig.

Her er

$$\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle = \int \Psi^* (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \Psi \, dx$$

Bevis : Se s. 48–50 i notater fra H20.

Eks: $A = x$, $B = p$ dvs $\hat{A} = x$, $\hat{B} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

$$[x, \hat{p}] = i\hbar \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta x \cdot \Delta p \geq \tfrac{1}{2}\hbar}$$

Gaussisk bølgefunksjon

$$\Psi(x, t=0) = C \cdot \exp\left\{ -\left(\frac{x - x_0}{2\sigma}\right)^2 + ikx \right\}$$

har <u>minimalt</u> uskarphetsprodukt $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{1}{2}\hbar$.
Tyngdepunkt: $\langle x \rangle = x_0$; Midlere impuls: $\langle p \rangle = \hbar k$

Tidsutviklingen $\Psi(x,t)$:

Med $V = 0$, dvs en fri partikkel:

$\langle x \rangle (t) = x_0 + \frac{\hbar k}{m} \cdot t$; $\langle p \rangle (t) = \hbar k$ (uendret)

$\Delta x(t)$ øker med t, dvs vi har dispersjon
$\Delta p(t) = \Delta p(0) = \hbar / 2\sigma$ (uendret)

Med $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$, dvs en harmonisk oscillator:

$|\Psi(x,t)|^2$ pendler fram og tilbake, uten at Δx øker med t, dvs essensielt som en klassisk harmonisk oscillator. Kalles en <u>koherent</u> tilstand. (PCH 3.5.5)
Prøv gjerne å simulere dette i obl. øving nr 2.

Forventningsverdienes tidsutvikling

[PCH 4.3 ; DJG 3.4.3 ; IØ 4.3]

Vi ser bare på operatorer $\hat{F}$ som ikke er eksplisitt tidsavhengige, dvs vi antar $\partial \hat{F}/\partial t = 0$. Dermed:

$$\frac{d}{dt}\langle F\rangle = \frac{d}{dt}\left\{\int \Psi^* \hat{F}\,\Psi\,dx\right\}$$

$$= \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\hat{F}\,\Psi\,dx + \int \Psi^* \hat{F}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\,dx$$

$$\overset{SL}{=} \int \left(\frac{\hat{H}\Psi}{i\hbar}\right)^* \hat{F}\,\Psi\,dx + \int \Psi^* \hat{F}\left(\frac{\hat{H}\Psi}{i\hbar}\right)dx$$

$$\overset{PCH\,2.8}{=} \int \frac{i}{\hbar}\Psi^* \hat{H}\hat{F}\,\Psi\,dx - \int \frac{i}{\hbar}\Psi^* \hat{F}\hat{H}\,\Psi\,dx$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left\langle [\hat{H},\hat{F}]\right\rangle$$

Dvs: $\langle F\rangle$ endrer seg ikke hvis $\hat{F}$ kommuterer med Hamiltonoper. $\hat{H}$.

Ehrenfests teorem [PCH 4.4 ; DJG 1.5, 4.1 ; IØ 4.4]

Slår fast at de kvantemek. forv.verdiene $\langle x\rangle$ og $\langle p\rangle$ oppfyller samme bevegelseslign. som de klassiske x og p,

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{p}{m} \quad ; \quad \frac{dp}{dt} = F = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Bevises raskt med Eks 2 fra s. 41–42,

$$[\hat{H}, x] = \frac{\hbar}{im}\hat{p} \quad ; \quad [\hat{H}, \hat{p}] = i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}$$

Dermed:

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},x]\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{p}\rangle = \frac{1}{m}\langle p\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle p\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{p}]\rangle = -\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$$

3D:

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{r}\rangle = \frac{\langle\vec{p}\rangle}{m} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\langle\vec{p}\rangle = -\langle\nabla V\rangle$$

Innsetting av

$$\langle p\rangle = m\frac{d}{dt}\langle x\rangle$$

i lign. for $\langle p\rangle$ gir nå

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = \langle F\rangle$$

Kvantemekanikkens versjon av Newtons 2. Lov.