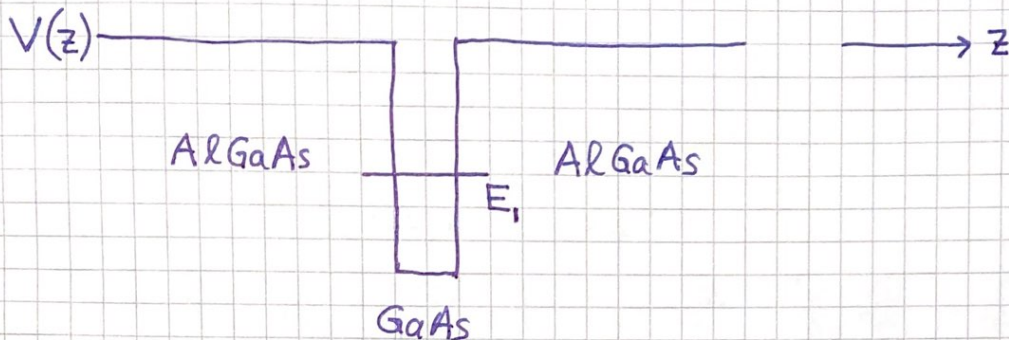


Isotropt potensial i 2D [PCH 5.3]

(81)

Kan lage en essensielt todimensjonal verden for elektroner med (f.eks) en smal potensialbrønn med en bundet tilstand:

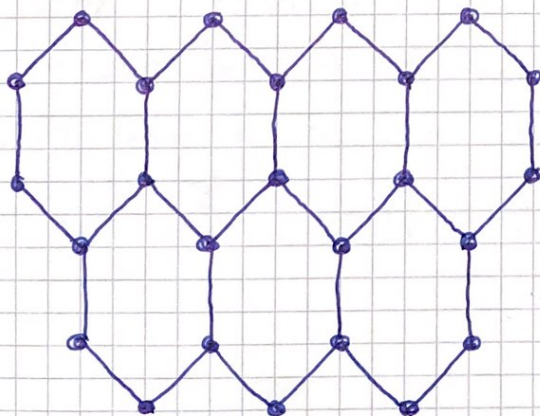


Elektroner i nivået E_1 ser et 2D potensial $V(x,y)$, som er isotropt dersom

$$V(x,y) = V(r) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

Mye spennende kan gjøres med en slik todimensjonal elektrongass (2DEG); jf. TFY4340 Nanofysikk.

Grafen er et annet eksempel:



2D heksagonalt
gitter av C-atomer
(ikke isotropt pot. V)

TUSL i polarkoordinater ; μ = partikkelens masse, m = kvantetall for dreieimpulsen :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi(r, \varphi) + V(r) \Psi(r, \varphi) = E \Psi(r, \varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Utleddning (foreleses ikke) :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1 + y^2/x^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + y^2/x^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$$

Sett inn og pass på at operatorene $\frac{\partial}{\partial r}$ og $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ i $\partial/\partial x$ "til venstre" også virker på $\partial/\partial x$ "til høyre", og tilsvarende for $(\partial/\partial y)(\partial/\partial y)$, selvsagt.

Diverse ledd kansellerer heldigvis, og vi får

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

"qed"

Som vanlig har TUSL produktløsn.

(83)

$$\Psi(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$$

og separerer i en lign. for $R(r)$ og en for $\Phi(\varphi)$.

Multipliser TUSL med $-2\mu r^2/\hbar^2 \Psi$ og samle "r-saker" og "φ-saker" på hver sin side:

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} - \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = - \frac{\Phi''}{\Phi} = m^2$$

Hvis $V(r)$ er kjent, kan radialdelen $R(r)$ og de tillatte energiverdiene E bestemmes.

Her fokuserer vi imidlertid på vinkeldelen, som bestemmes av ligningen

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi \quad (m^2 = \text{konstant})$$

med løsning $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$, og med entydige løsninger,

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

dersom

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi + 2\pi)} = e^{im\varphi} e^{im \cdot 2\pi}$$

dvs

$$e^{im \cdot 2\pi} = 1$$

dvs

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vi skal vise at $\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}$ er egenfunk. til $\hat{L}_z$, som for bevegelse i xy-planet er operator for både L_z og $L = |\vec{L}|$, siden $L_x = L_y = 0$.

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = (x\hat{x} + y\hat{y}) \times (p_x\hat{x} + p_y\hat{y}) \\ &= (xp_y - yp_x)\hat{z} = L_z\hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{L}_z &= x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &\stackrel{(5.82)}{=} \frac{\hbar}{i} \left[r \cos\varphi \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right. \\ &\quad \left. - r \sin\varphi \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

[Et naturlig resultat: For lineær impuls i z-retning har vi operatoren $\hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$. For dreieimpuls om z-aksen har vi operatoren $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$.]

$$\text{Fra før: } \hat{p}_z e^{ip_z z/\hbar} = p_z e^{ip_z z/\hbar}$$

Da må $\Phi_m(\varphi)$ være egenfunksjon til $\hat{L}_z$ med egenverdi $m\hbar$:

$$\hat{L}_z \Phi_m = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} e^{im\varphi} = m\hbar e^{im\varphi} = m\hbar \Phi_m$$

Da er selvsagt også

$$\hat{L}_z \Psi_m(r, \varphi) = \hat{L}_z R(r) e^{im\varphi} = m\hbar \Psi_m(r, \varphi),$$

og utg.punktet var $\hat{H} \Psi_m(r, \varphi) = E \Psi_m(r, \varphi)$.

Dvs: $\hat{H}$ og $\hat{L}_z$ har felles egenfunksjoner.