

i Institutt for fysikk

Eksamen i TFY4215 Innføring i kvantefysikk

Faglig kontakt under prøven: Jon Andreas Støvneng

Tlf.: 45 45 55 33

Dato: 8. august 2019

Tid (fra-til): 09.00 - 13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C.

Godkjent kalkulator.

Rottmann, matematisk formelsamling.

Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter.

Formler, 4 sider. (Er også tilgjengelig som PDF.)

(Høyreklikk for å åpne i eget uavhengig vindu. Mac: Ctrl+klikk.)

Annen informasjon:

40 flervalgsoppgaver med lik vekt. Kun ett svar er korrekt på hver oppgave.

1 poeng for riktig svar. 0 poeng for feil svar eller intet svar.

- 1 Emisjon av et foton fra hydrogenatomer der slutt-tilstanden tilsvarer at hovedkvantetallet er $n = 6$ kalles Humphrey-serien. Hva er energien til slike fotoner når start-tilstanden tilsvarer $n = 11$?

A 101 meV B 142 meV C 183 meV D 224 meV E 265 meV

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

- 2 En fri partikkel har masse $80.4 \text{ GeV}/c^2$ og bølgelengde 4.4 fm . Hva er partikkelens hastighet?

A $0.00023c$ B $0.0035c$ C $0.047c$ D $0.59c$ E $1.00c$

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

- 3 Kvantemekanisk interferens er observert når store organiske molekyler sendes gjennom et diffraksjonsgitter. (Se f eks M. Arndt et al, Nature Nanotechnology **7**, 297 (2012).) Hva er midlere de Broglie-bølgelengde for en gass med $\text{C}_{32}\text{H}_{18}\text{N}_8$ -molekyler ved en absolutt temperatur 750 K ? Atomære masser for C, H og N er hhv omtrent $12u$, $1u$ og $14u$.

A 4.1 fm B 4.1 pm C 4.1 nm D $4.1 \mu\text{m}$ E 4.1 mm

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

4 Oppgave 4 - 7: Elektron i endimensjonal potensialboks.

Et elektron med masse m_e befinner seg i en endimensjonal potensialboks med harde vegger, dvs potensialet er $V(x) = 0$ for $0.00 < x < L = 55.0 \text{ \AA}$ og $V(x) = \infty$ ellers. Hva er omtrent elektronets hastighet (i absoluttverdi) dersom det befinner seg i grunntilstanden $\psi_1(x)$?

A 12 km/s B 30 km/s C 48 km/s D 66 km/s E 84 km/s

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

5 Elektronet absorberer et foton slik at det eksiteres fra grunntilstanden til 1. eksiterte tilstand $\psi_2(x)$. Hva er omtrent det absorberte fotonets bølgelengde?

A 13 μm B 18 μm C 23 μm D 28 μm E 33 μm

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

- 6 Anta nå at elektronet i utgangspunktet (ved et tidspunkt $t < 0$) befinner seg i 2. eksiterte tilstand $\psi_3(x)$, men at det til enhver tid er en viss sannsynlighet for at det spontant gjennomgår en overgang til 1. eksiterte tilstand (med emisjon av et foton). Og dersom elektronet befinner seg i 1. eksiterte tilstand, er det til enhver tid en viss sannsynlighet for at det spontant gjennomgår en overgang til grunntilstanden (med emisjon av et foton).

Ved tidspunktet $t = 0$ beskrives elektronet derfor av den normerte, men ikke-stasjonære bølgefunksjonen

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{7}} \psi_3(x) + \frac{2}{\sqrt{7}} \psi_2(x) + c_1 \psi_1(x)$$

Hva er da sannsynligheten for at en måling av elektronets energi ved tidspunktet $t = 0$ vil gi grunntilstandsenergien E_1 ?

A 74% B 59% C 44% D 29% E 14%

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

7 Anta i stedet at elektronet ved tidspunktet $t = 0$ er preparert i den normerte tilstanden

$$\Psi(x, 0) = -\frac{2}{\sqrt{L}} \cos \frac{2\pi x}{L} \quad \text{for } \frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}$$

og $\Psi(x, 0) = 0$ ellers. Hva er nå sannsynligheten for at en måling av elektronets energi gir verdien $E_4 = 8\pi^2 \hbar^2 / m_e L^2$?

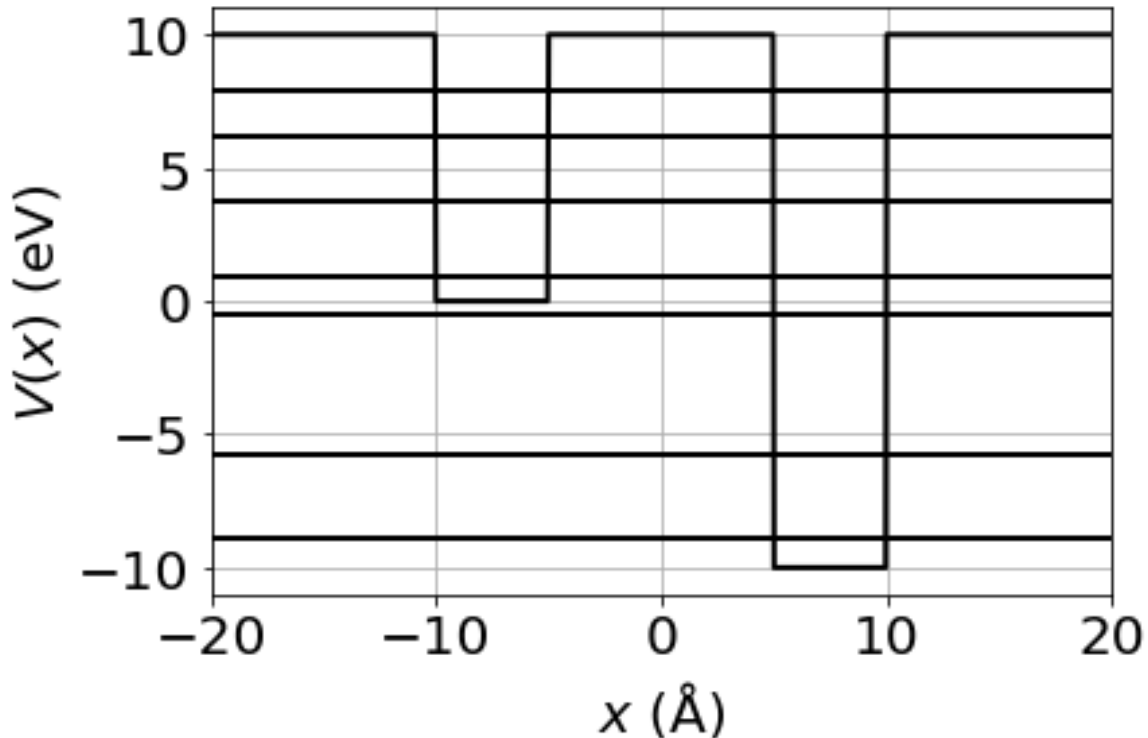
A 70% B 35% C 0% D 25% E 50%

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

8 Oppgave 8 - 11: Elektron(er) i endimensjonalt toatomig modellmolekyl AB.



Et elektron med masse m_e befinner seg i det endimensjonale potensialet $V(x)$ vist i figuren over. En sentralt plassert barriere har høyde $V_0 = 10 \text{ eV}$ og bredde $b = 10 \text{ \AA}$. På venstre side av barrieren (modellatom A) er potensialet $V(x) = 0$ på et intervall med bredde $w = 5.0 \text{ \AA}$. På høyre side av barrieren (modellatom B) er potensialet $V(x) = -10 \text{ eV}$ på et intervall med bredde $w = 5.0 \text{ \AA}$. Forøvrig har potensialet den konstante verdien $V(x) = V_0 = 10 \text{ eV}$. I figuren er energiene til systemets 7 bundne (romlige) tilstander markert med horisontale linjer: $-8.92, -5.72, -0.55, 0.96, 3.73, 6.14, 7.91 \text{ eV}$.

Hva kan du si om bølgefunksjonen $\psi_0(x)$ som beskriver systemets laveste energiegentilstand?

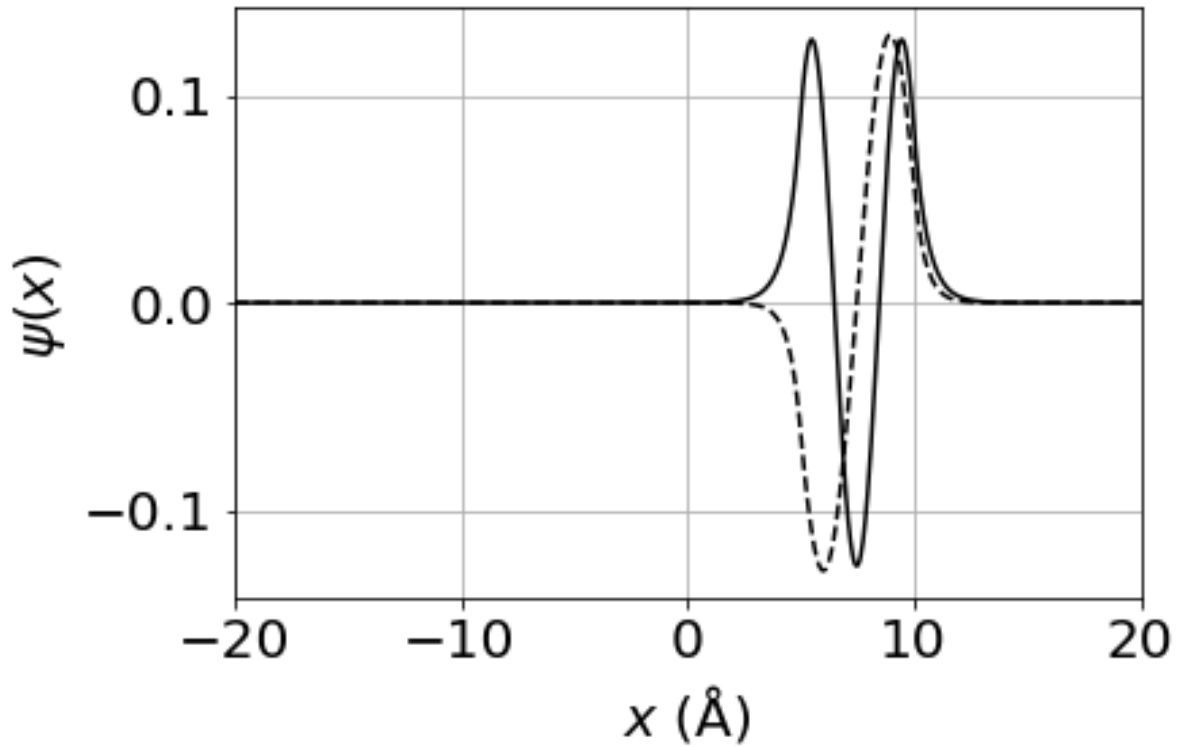
- A Symmetrisk med hensyn på $x = 0$. Ingen nullpunkter.
- B Ingen bestemt symmetri med hensyn på $x = 0$. Ingen nullpunkter. I all hovedsak lokalisert på atom B.
- C Ingen bestemt symmetri med hensyn på $x = 0$. Ett nullpunkt. I all hovedsak lokalisert på atom A.
- D Antisymmetrisk med hensyn på $x = 0$.
- E Symmetrisk med hensyn på $x = 0$. Lokalisert med lik vekt på atom A og B.

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

9



Anta at elektronet foretar en spontan overgang fra 2. til 1. eksiterte tilstand, angitt i figuren over, med utsendelse av et foton. Hva er dette fotonets bølgelengde?

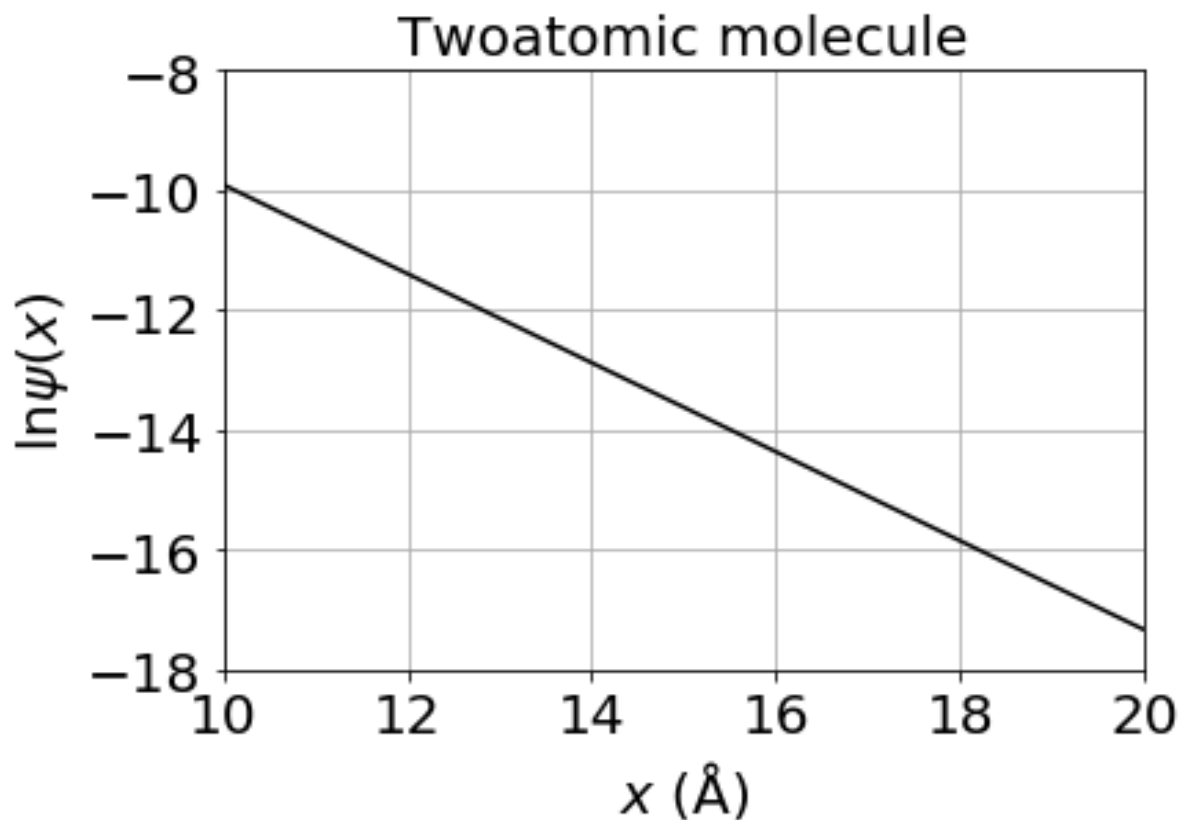
A 78 nm B 131 nm C 186 nm D 239 nm E 292 nm

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

10



Figuren over viser $\ln \psi(x)$, for verdier av x mellom 10 og 20 Å, for en bundet tilstand i et utsnitt av det klassisk forbudte området til høyre for "molekylet". Basert på disse opplysningene, hva er denne tilstandens energieigenverdi?

A 7.91 eV B 6.14 eV C 3.73 eV D 0.96 eV E -0.55 eV

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

11 Anta at molekylet består av to atomer, med atomnummer hhv 3 og 7, og at elektronene ikke vekselvirker med hverandre. Dog er elektronene fullt klar over at de er partikler med spinn $1/2$, slik at de er nødt til å adlyde Paulis eksklusjonsprinsipp. Hva er omtrent molekylets totale energi (dvs: summen av alle elektronenes energi) i grunntilstanden?

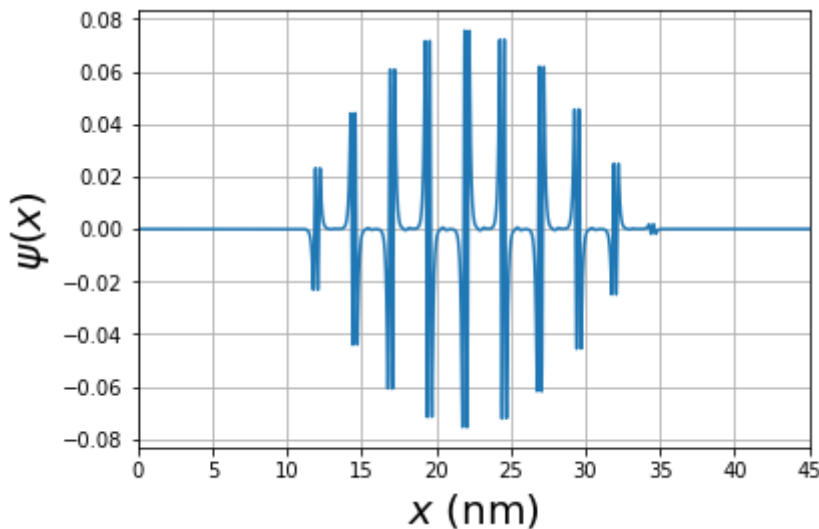
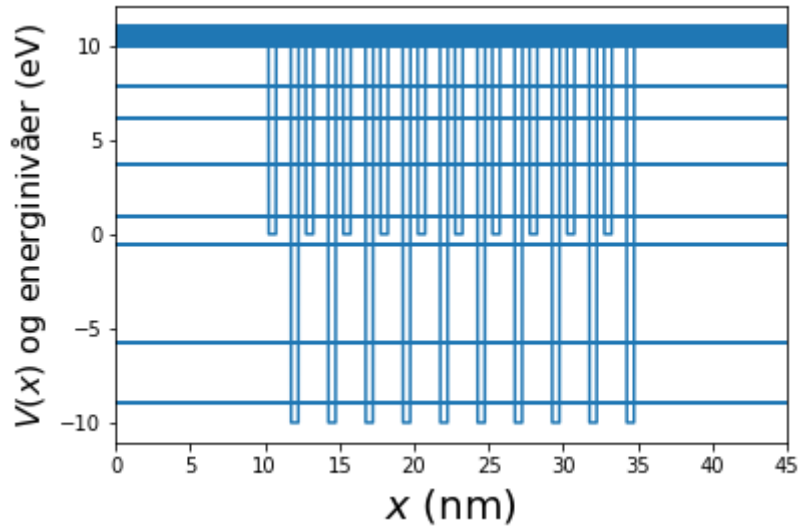
A **11 eV** B **3 eV** C **-5 eV** D **-13 eV** E **-21 eV**

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

12 Oppgave 12 - 14: Endimensjonal krystallmodell.



Som modell for en krystall bruker vi potensialet i den øverste figuren. Det består av 10 "modellmolekyler AB", som i oppgave 8, adskilt av potensialbarrierer der potensialet er 10 eV, og på en slik måte at gitterkonstanten (dvs bredden på hvert molekyl) blir 25 Å. På høyre og venstre side av de 10 modellmolekylene er potensialet konstant med verdi 10 eV. Horisontale linjer i den øverste figuren angir samtlige 70 bundne (romlige) tilstander, fordelt på kvasikontinuerlige energibånd, samt et kontinuerlig bånd av ubundne tilstander med energi større enn 10 eV.

Bølgefunksjonen (for en av de bundne tilstandene) som illustreres i den nederste figuren kan, med god tilnærming, skrives på formen $\psi(x) = u(x) \sin kx$, der funksjonen $u(x)$ har samme periodisitet som "krystallen". (Blochs teorem.) Hva er omtrent verdien av bølgetallet k i dette tilfellet?

- A 8.13 nm^{-1} B 6.13 nm^{-1} C 4.13 nm^{-1} D 2.13 nm^{-1} E 0.13 nm^{-1}

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

- 13** Det opplyses at bølgefunksjonen som illustreres i forrige oppgave har 50 nullpunkter. (Dette er ikke direkte synlig i figuren.) Hva er da omtrent den tilhørende energiegenverdien?

A 6.1 eV B 3.7 eV C 0.96 eV D -0.55 eV E -5.7 eV

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

- 14 Anta at de 10 "molekylene" i denne "krystallen" har 10 ikke-vekselvirkende elektroner hver. Vi minner nok en gang om at elektroner er spinn-1/2-partikler som adlyder Pauliprinsippet. Omtrent hvor stort er båndgapet? (Dvs, energigavstanden fra høyeste okkuperte til laveste ledige tilstand.)

A Null B 1.2 eV C 2.4 eV D 3.6 eV E 4.8 eV

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

- 15 Hva er kommutatoren $[\hat{p}_x, \hat{L}_x]$?

- A $-\hbar^2 \partial/\partial x$
B $-\hbar^2$
C Null
D $\hbar x$
E \hbar^2/x

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

- 16** Oppgave 16 - 19: Dimer av sølv
Molekylet Ag_2 har bindingslengde ca **2.62** Å. Vibrasjonsfrekvensen er $\nu = 6.0 \cdot 10^{12}$ Hz. Molekylets reduserte masse (dersom vi antar isotopen ^{107}Ag) er **53.5u**. Dersom vi beskriver vibrasjonsfrihetsgraden som en enkel harmonisk oscillator, hva er fjærkonstanten?

A 126 N/mm B 126 N/cm C 126 N/m D 126 mN/m E 126 mN/km

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

- 17** Omtrent hvor høy temperatur må til for å kunne anvende det klassiske ekvipartisjonsprinsippet på vibrasjonsfrihetsgradene i Ag_2 ?
(Tips: Sett vibrasjonsenergien lik termisk energi.)

A 3 K B 30 K C 300 K D 3000 K E 30000 K

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

- 18 I en gass med molekyler $^{107}\text{Ag}_2$ er sannsynligheten for at et gitt molekyl har vibrasjonsenergi $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ proporsjonal med boltzmannfaktoren $\exp(-E_n/k_B T)$. Her er k_B Boltzmanns konstant og T er gassens (absolutte) temperatur. La N_0 og N_1 angi antall molekyler som befinner seg i hhv grunntilstanden og 1. eksiterte vibrasjonstilstand. Omtrent hvor stort er forholdet N_1/N_0 i en $^{107}\text{Ag}_2$ -gass ved romtemperatur (300 K)?

A 0.000000004 B 0.0000004 C 0.00004 D 0.004 E 0.4

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

- 19 Anta så at molekylet $^{107}\text{Ag}_2$ kan betraktes som en stiv rotator. Hva er energidifferansen mellom laveste og nest laveste tillatte rotasjonsenergi?

A 1.1 meV B 0.11 neV C 0.11 μeV D 11 μeV E 11 neV

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

20 Oppgave 20 - 25: Todimensjonal isotrop harmonisk oscillator.

Vi betrakter en todimensjonal isotrop harmonisk oscillator,

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (r^2 = x^2 + y^2),$$

med energieigenfunksjoner

$$\psi_{n_x n_y}(x, y) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)$$

på produktform, med envariabelfunksjoner som i formelvedlegget. Hva er systemets laveste mulige energi?

- A $2\hbar\omega$ B $\frac{3}{2}\hbar\omega$ C 0 D $\frac{1}{2}\hbar\omega$ E $\hbar\omega$

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

21 Hva er $\langle L_z \rangle$ (dvs forventningsverdien av L_z) i tilstanden ψ_{11} ?

- A Null B $-\hbar$ C $\hbar/2$ D \hbar E $2\hbar$

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

22 Hva er L_z for en partikkel i tilstanden ψ_{00} ?

A $-\hbar$ B Null C $\hbar/2$ D \hbar E Uskarp

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

23 Hva er (den orbitale) degenerasjonsgraden til energinivået $7\hbar\omega$?

A 8 B 28 C 21 D 6 E 7

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

24 I tilstanden ψ_{10} , i hvilke posisjoner (x, y) er sannsynlighetstettheten $|\psi_{10}|^2$ størst?

- A $(0, 0)$ B $(\pm\sqrt{\hbar/m\omega}, 0)$ C $(\pm\sqrt{\hbar/2m\omega}, \pm\sqrt{\hbar/2m\omega})$
D $(\pm\sqrt{m\omega/\hbar}, 0)$ E $(\pm\sqrt{2\hbar/\omega}, 0)$

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

25 20 identiske ikke-vekselvirkende fermioner (spinn-1/2-partikler) befinner seg i dette todimensjonale oscillatorpotensialet. Hva er systemets totale energi i grunntilstanden?

- A $20\hbar\omega$ B $30\hbar\omega$ C $40\hbar\omega$ D $50\hbar\omega$ E $60\hbar\omega$

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

26 Oppgave 26 og 27: Spredning mot endimensjonal deltafunksjonsbarriere

En partikkel (plan bølge) med masse m og energi E sendes inn mot potensialet $V(x) = \beta\delta(x)$. Her er β en (ikke dimensjonsløs) positiv konstant, og $\delta(x)$ er Diracs deltafunksjon. Innkommende, reflektert og transmittert bølge er hhv $\psi_i(x) = \exp(ikx)$, $\psi_r(x) = r \exp(-ikx)$ og $\psi_t(x) = t \exp(ikx)$. Transmisjonsamplituden er $t = 1/(1 + im\beta/k\hbar^2)$. Hva er sannsynlighetsstrømmen?

A $\frac{1}{1+2m\beta^2/E\hbar^2}$ B $\frac{E/m}{1-m\beta^4/E\hbar^2}$ C $\frac{\sqrt{2E/m}}{1+m\beta^2/2E\hbar^2}$ D $\frac{\sqrt{2E/m}}{1+\hbar^2\beta^2}$ E $\frac{\sqrt{2mE}}{1+\beta/2mE\hbar}$

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

27 Hva er SI-enheten til størrelsen β i forrige oppgave?

(Tips: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$)

A Jm B J C m D J/m E m/J

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

28 Oppgave 28 - 30: Hydrogenatomets $2p$ -tilstander.

En av energiegentilstandene i hydrogenatomet er $\psi_{210} = R_{21}Y_{10}$. For denne tilstanden, i hvilken avstand fra origo er radialtettheten $|rR_{21}|^2$ maksimal?

A 0.16 nm B 0.21 nm C 0.26 nm D 0.32 nm E 0.42 nm

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

29 Anta at elektronet befinner seg i tilstanden ψ_{211} . Hva er L_y i denne tilstanden?

A Uskarp B $2\hbar$ C $\hbar/2$ D \hbar E Null

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

30 Anta at elektronet befinner seg i tilstanden ψ_{21-1} . Hva er L_x i denne tilstanden?

A Null B $2\hbar$ C $\hbar/2$ D \hbar E Uskarp

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

31 Oppgave 31 - 34: Inversjon i ammoniakk.

Ammoniakk, NH_3 , har i likevekt form som en pyramide, med nitrogenatomet i avstand d_0 fra planet P som dannes av de tre hydrogenatomene. Molekylet kan inverteres ved at N-atomet hopper eller tunnelerer fra den ene til den andre siden av dette planet. Vi modellerer molekylets energi ved hjelp av funksjonen

$$E(x, y) = E_0(x^4 + x^2y^2 - x^2 + y^2)$$

med $E_0 = 1.00 \text{ eV}$. Koordinaten $x = d/d_0$ er en dimensjonsløs størrelse som angir posisjonen til N-atomet langs en akse som står normalt på planet P. Den dimensjonsløse størrelsen y representerer N-atomets avstand til molekylets symmetriakse.

Hva er verdien av koordinaten y i energifunksjonens stasjonære punkter?

(Tips: I stasjonære punkter er $\nabla E = 0$.)

A 3 B 2 C 1 D 0 E Ubestemt

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

32 Molekylet har to likevektsgeometrier med like stor energi. Hva er x i disse to geometriene?

A $\pm 1/2$ B ± 1 C $\pm 1/4$ D ± 2 E $\pm 1/\sqrt{2}$

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

33 Hvor stor er energibarrieren for inversjon av molekylet, dvs for at N-atomet skal gå fra den ene til den andre likevektsgeometrien?

A 1.41 eV B 1.00 eV C 0.75 eV D 0.50 eV E 0.25 eV

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

34 Med to uavhengige koordinater i energifunksjonen har systemets hessianmatrise \mathbf{H} fire elementer $\mathbf{H}_{ij} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}$ der $x_1 = x$ og $x_2 = y$. Hvordan ser matrisen \mathbf{H}/E_0 ut for dette systemet?

A $\begin{bmatrix} 4x^3 + 2xy^2 - 2x & 0 \\ 0 & 2x^2y + 2y \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 12x^2 + 2y^2 - 2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 + 2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 12y^2 + 4x^2 + 4 & y^2 - 4xy \\ x^2 - 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 4x^2 + 2y^2 - 8 & xy \\ xy & 4x^2 + 2y^2 \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} 2x^2y^2 + 1 & -2xy \\ -2xy & 4xy - 2 \end{bmatrix}$

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

35 Oppgave 35 - 39: Spinn-1/2-partikkel.

En partikkel med spinn 1/2 befinner seg i den normerte spinntilstanden

$$\chi = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 1 - i/2 \\ i - 1/2 \end{pmatrix}$$

Hvilke verdier kan en måling av partikkelens spinnkomponent S_x resultere i?

A 0 eller $\pm \hbar$ B $\pm 2\hbar/5$ C $\pm \hbar/2$ D $\pm \hbar/5$ E $\pm \hbar$

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

36 Hva er forventningsverdien av partikkelens spinnkomponent S_x ?

A $2\hbar/5$ B $\hbar/5$ C $-\hbar/5$ D $-2\hbar/5$ E 0

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

37 Hva er forventningsverdien av partikkelens spinnkomponent S_y ?

A $\hbar/5$ B $3\hbar/10$ C $3\hbar/8$ D $\hbar/7$ E 0

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

38 Hva er forventningsverdien av partikkelens spinnkomponent S_z ?

A $\hbar/2$ B $-\hbar/2$ C $\hbar/3$ D 0 E $-\hbar/3$

Velg ett alternativ

- A
- B
- C
- D
- E

Maks poeng: 1

39 Hva er kommutatoren $[\hat{S}_x, \hat{S}_y]$?

- A \hbar B $-i\hat{p}_z$ C $\hbar\hat{L}_z$ D $i\hat{S}_z$ E $i\hbar\hat{S}_z$

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1

40 Fra hvilket land kom Niels Bohr?

- A Danmark
B Finland
C Sverige
D Tyskland
E Polen

Velg ett alternativ

- A
 B
 C
 D
 E

Maks poeng: 1