

## FLERVALGSOPPGAVER – TRENING TIL EKSAMEN

En partikkel med masse  $m$  beskrives av den stasjonære tilstanden

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t},$$

med

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \frac{1}{3i}e^{-ikx} & x < 0 \\ f(x) + g(x) & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2i\sqrt{2}}{3}e^{ikx} & x > 2 \end{cases}$$

Oppgavene 1 – 2 omhandler denne partikkelen.

1) Hva er partikkelens energi  $E$ ?

- A)  $E = 8k$       B)  $E = \hbar k$       C)  $E = k/m$       D)  $E = \hbar\omega$       E)  $E = 0$

2) Hva er sannsynlighetsstrømmen  $j$  for denne tilstanden?

- A)  $j = k^2$       B)  $j = 3\hbar k$       C)  $j = 8\hbar k/9m$       D)  $j = k/3m$       E)  $j = 0$

3) En partikkel med masse  $m$  befinner seg i bokspotensialet  $V(x) = 0$  for  $0 < x < L$ ;  $V(x) = \infty$  ellers. Energieigenfunksjoner  $\psi_n(x)$  og tilhørende energieigenverdier  $E_n$  er oppgitt i formelarket. Anta at partikkelen befinner seg i (den normerte men ikke-stasjonære) tilstanden

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^5 c_n \psi_n(x) \exp(-iE_n t/\hbar),$$

med  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 1/\sqrt{5}$ . Hva er forventningsverdien  $\langle E \rangle$  av partikkelens energi?

- A)  $\langle E \rangle = 11h^2/40mL^2$       B)  $\langle E \rangle = 33h^2/40mL^2$       C)  $\langle E \rangle = 55h^2/40mL^2$   
 D)  $\langle E \rangle = 77h^2/40mL^2$       E)  $\langle E \rangle = 99h^2/40mL^2$

4) Hva er kommutatoren  $[\hat{p}_z, z]$ ?

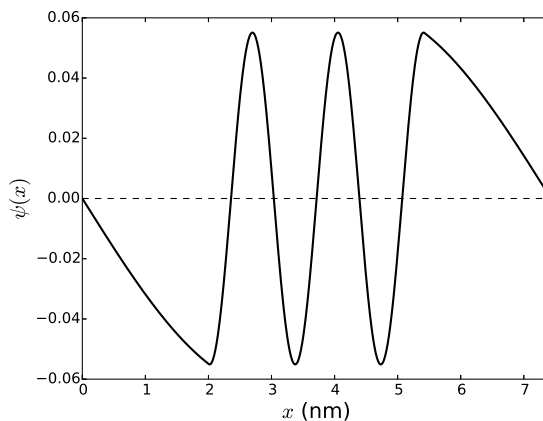
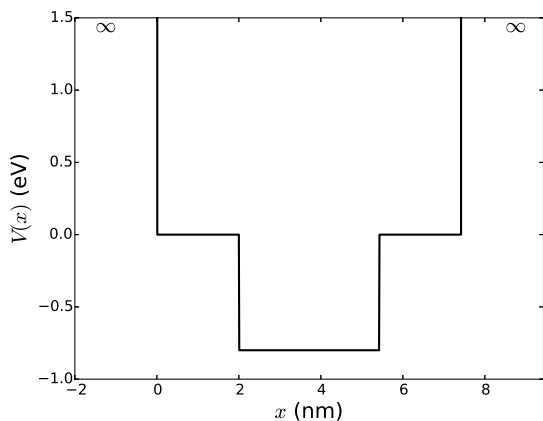
- A) 0      B)  $i\hbar$       C)  $\hbar/i$       D)  $i\hbar\hat{p}_z/m$       E)  $i\hbar z$

5) Hva er kommutatoren  $[z, \hat{K}]$ ?

- A) 0      B)  $i\hbar$       C)  $\hbar/i$       D)  $i\hbar\hat{p}_z/m$       E)  $i\hbar z$

6) Til hvilke operatører er  $\psi(x, y, z) = \sin(kx) \cos(ky) \tan(kz)$  en egenfunksjon?

- A)  $\hat{p}_x$  og  $\hat{p}_z$       B)  $\hat{p}_y$       C)  $\hat{p}_y$  og  $\hat{H}$       D)  $\hat{H}$       E) Ingen av disse



7) Figuren til venstre viser et endimensjonalt potensial  $V(x)$ . Hva kan du si om energieigenverdien  $E$  assosiert med bølgefunksjonen til høyre?

- A)  $E \simeq -0.8$  eV      B)  $E \simeq -0.4$  eV      C)  $E \simeq 0$       D)  $E \simeq 0.4$  eV      E)  $E \simeq 0.8$  eV

8) Hvor mange negative energieigenverdier har potensialet i forrige oppgave?

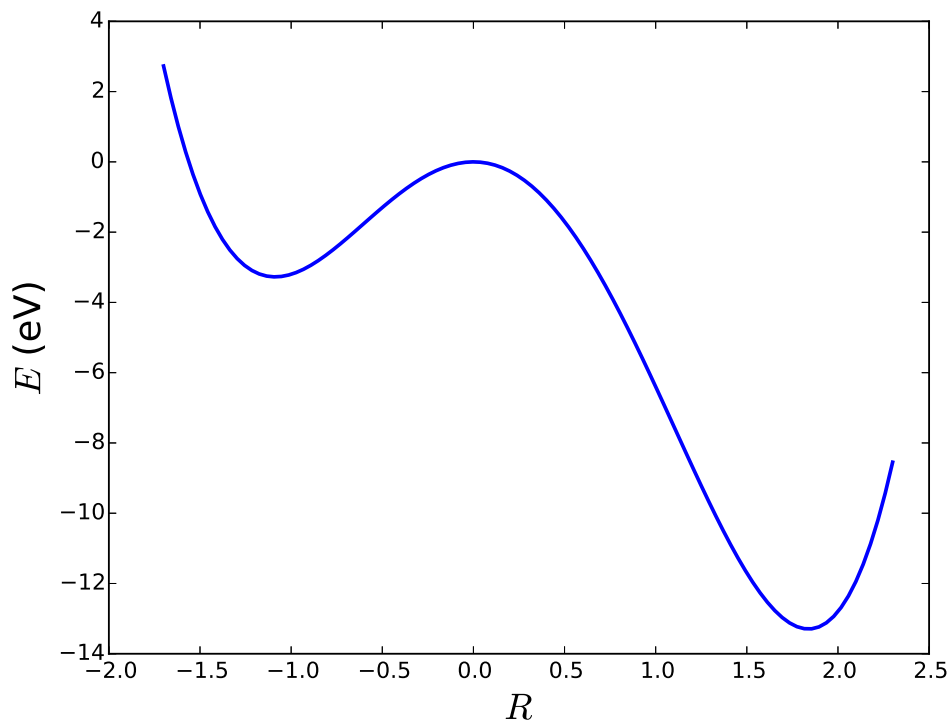
- A) 1      B) 3      C) 5      D) 7      E) 9

9) Den isotrope tredimensjonale harmoniske oscillatoren,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 = V(r),$$

har energiegtilstander på produktform,  $\psi_{n_x n_y n_z} \equiv (n_x n_y n_z) = \psi_{n_x}(x) \psi_{n_y}(y) \psi_{n_z}(z)$ , der  $\psi_{n_x}(x)$  osv er energiegtilstander til den tilsvarende endimensjonale harmoniske oscillatoren (se formelark). Hva er det klassisk tillatte området for en partikkel i den stasjonære tilstanden (222)?

- A)  $r \leq \sqrt{5\hbar/m\omega}$       B)  $r \leq \sqrt{15\hbar/m\omega}$       C)  $r \leq \sqrt{25\hbar/m\omega}$   
 D)  $r \leq \sqrt{35\hbar/m\omega}$       E)  $r \leq \sqrt{45\hbar/m\omega}$



10) En kjemisk reaksjon kan beskrives med en energifunksjon  $E(R)$  som i figuren over. Her er  $R$  en dimensjonsløs reaksjonskoordinat. Anta at reaksjonen starter i et lokalt energiminimum og går via en transisjonstilstand til et globalt energiminimum. Hva er denne reaksjonens aktiveringsenergi?

- A)  $E_a = 3.3$  eV    B)  $E_a = 4.3$  eV    C)  $E_a = 5.3$  eV    D)  $E_a = 6.3$  eV    E)  $E_a = 7.3$  eV

FORMLER ETC

- Partikkel i boks

$$V(x) = 0 \text{ for } 0 < x < L, \quad V(x) = \infty \text{ ellers}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Endimensjonal harmonisk oscillator

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi_n(x) = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \psi_n(x); \quad \langle \psi_n, \psi_k \rangle = \delta_{nk};$$

$$\psi_n(x) = \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-y^2/2} H_n(y), \quad y = \frac{x}{\sqrt{\hbar/m\omega}};$$

$$H_0(y) = 1, \quad H_1(y) = 2y, \quad H_2(y) = 4y^2 - 2, \quad H_3(y) = 8y^3 - 12y, \quad \dots;$$

$$\hat{P}\psi_n(x) \equiv \psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x).$$

- Laplace-operatoren og dreieimpulsoperatorer i kulekoordinater

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{\hbar^2 r^2};$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right), \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi};$$

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i} \left( -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right);$$

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z] = 0, \quad [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, \text{ osv.}$$

- Vinkelfunksjoner

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{\mathbf{L}}^2 \\ \hat{L}_z \end{matrix} \right\} Y_{lm} = \left\{ \begin{matrix} \hbar^2 l(l+1) \\ \hbar m \end{matrix} \right\} Y_{lm}, \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) Y_{l'm'}^* Y_{lm} = \delta_{l'l} \delta_{m'm};$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \equiv Y_{pz}, \quad Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi};$$

$$Y_{px} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{1,-1} - Y_{11}), \quad Y_{py} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{y}{r} = \frac{i}{\sqrt{2}} (Y_{11} + Y_{1,-1});$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1); \quad Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}; \quad Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}.$$

$$\hat{P}Y_{lm} = (-1)^l Y_{lm}.$$

- Energieigenfunksjoner og radiallyingning, kulesymmetrisk potensial  $V(r)$

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi);$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{eff}}^l(r) \right] u(r) = E u(r), \quad V_{\text{eff}}^l(r) \equiv V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}, \quad u(0) = 0.$$

- Energieigenverdier og -egenfunksjoner, hydrogenatomet,  $V(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \equiv \frac{E_1}{(l+1+n_r)^2}, \quad E_1 = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2;$$

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi);$$

$$R_{10} = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}; \quad R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2} a_0^{3/2}} \left( 1 - \frac{r}{2a_0} \right) e^{-r/2a_0}; \quad R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6} a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}.$$

- Noen konstanter

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{Bohr-radien});$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137.0360} \quad (\text{finstrukturkonstanten});$$

$$\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 = \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \approx 13.6 \text{ eV} \quad (\text{Rydberg-energien}).$$

$$m_e \simeq 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad \hbar = h/2\pi \simeq 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad e \simeq 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad u \simeq 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

- Noen formler

$$\sin a = (e^{ia} - e^{-ia})/2i, \quad \cos a = (e^{ia} + e^{-ia})/2;$$

$$\tan y = \frac{1}{\cot y} = \tan(y + n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \dots;$$

$$\sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}); \quad \cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}); \quad \tanh y = \frac{1}{\coth y} = \frac{\sinh y}{\cosh y};$$

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1; \quad \frac{d}{dy} \sinh y = \cosh y; \quad \frac{d}{dy} \cosh y = \sinh y.$$

$$|y| \ll 1 \Rightarrow \exp(y) \simeq 1 + y$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1^* z_2)$$

- de Broglie:

$$\lambda = h/p \quad , \quad \nu = E/h$$

- Schrödingerligningen:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi$$

- Tidsuavhengig Schrödingerligning:

$$\widehat{H}\psi = E\psi$$

- Impulsoperator:

$$\widehat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \widehat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad , \quad f(p) \rightarrow f(\widehat{p})$$

- Kinetisk energi:

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

- Dreieimpuls:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

- Heisenbergs uskarphetsprinsipp:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle|$$

- Kommutator:

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] = \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}$$

- Stasjonær tilstand:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

- Forventningsverdier:

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx$$

$$\langle p \rangle = \int \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi dx$$

$$\langle F \rangle = \int \Psi^* \widehat{F} \Psi d\tau$$

- Bølgepakke:

$$\Psi(x, t) = \sum_j c_j \psi_j(x) e^{-iE_j t/\hbar}$$

- Grensebetingelser:

$\psi(x)$  kontinuerlig overalt,  $d\psi/dx$  diskontinuerlig ved  $\infty$  sprang i  $V(x)$

- Sannsynlighetsstrøm:

$$j = \text{Re} \left[ \Psi^* \left( \frac{\hbar}{mi} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \right]$$

- Usikkerhet (standardavvik):

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad , \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

- Ehrenfests teorem:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \rangle = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad , \quad \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = -\langle \nabla V \rangle$$

Emnekode:

Kandidatnummer:

Oppg	A	B	C	D	E	Oppg	A	B	C	D	E
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**NB: Kontroller at du har satt nøyaktig ETT kryss for HVER oppgave!**