**FY1006/TFY4215 Innføring i kvantefysikk Eksamen 9. august 2016**

**LØSNINGSFORSLAG**

**1**) **B**: $E = h\nu = hc/\lambda$ slik at $\lambda = hc/E$ som her blir 12 nm.

**2**) **A**: $K = p^2/2m_e$ og $p = h/\lambda$ gir $\lambda = h/\sqrt{2m_e K}$ som her blir 0.12 nm.

**3**) **B**: Et slik molekyl har masse $60 \cdot 12 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg $\simeq 1.2 \cdot 10^{-24}$ kg. Med hastighet 117 m/2 blir da impulsen $p = mv = 1.2 \cdot 10^{-24} \cdot 117 = 1.4 \cdot 10^{-22}$ kg m. Dermed blir de Broglie–bølgelengden $\lambda = h/p = 6.626 \cdot 10^{-34}/1.4 \cdot 10^{-22} = 4.7 \cdot 10^{-12}$ m $= 4.7$ pm.

**4**) **C**: Ved 300 K har vi $K = 3k_BT/2 = 3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300/2 = 6.2 \cdot 10^{-21}$ J, dvs ca 39 meV. Med $K = p^2/2m$ og $p = h/\lambda$ har vi $\lambda = h/p = h/\sqrt{2mK} = h/\sqrt{3mk_BT} = 6.626 \cdot 10^{-34}/\sqrt{(3 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} = 1.45 \cdot 10^{-10}$ m $= 1.45$ Å.

**5**) **E**: Må ha fotoner med energi større enn $W = 4.8$ eV, dvs $h\nu > W$, dvs $hc/\lambda > W$, dvs $\lambda < hc/W$, som med $W = 4.8$ eV gir $\lambda < 258$ nm.

**6**) **E**: I det klassisk forbudte området er $E < V$, og i første eksiterte tilstand er $E = 3\hbar\omega/2$. Dermed: $3\hbar\omega/2 < m\omega^2 x^2/2$, som gir $|x| > \sqrt{3\hbar/m\omega}$.

**7**) **B**: Absoluttkvadratet av koeffisientene $c_n$ gir sannsynligheten for at en måling av energien skal resultere i verdien $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$. Dermed er

$$\langle E \rangle = (1/4) \cdot \hbar\omega/2 + (1/4) \cdot 3\hbar\omega/2 + (1/4) \cdot 5\hbar\omega/2 + (1/4) \cdot 7\hbar\omega/2 = 2\hbar\omega.$$

**8**) **E**: En måling av partikkelens energi kan kun gi en av energiegenverdiene $(n + 1/2)\hbar\omega$.

**9**) **D**: I $\rho(x,t)$ får vi to tidsuavhengige ledd, fra absoluttkvadratet av hver av de to stasjonære tilstandene for seg. "Kryssleddene" blir til sammen proporsjonale med faktoren $\sin((E_2 - E_1)t/\hbar)$. Her er

$$E_2 - E_1 = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2mL^2} - \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2},$$

slik at

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1) = 4mL^2/3\pi\hbar.$$

**10**) **A**: Kvantetallene må her begge være lik 3 for at kvadratsummen skal bli 18.

**11**) **B**:

$$z(\hbar/i)(\partial/\partial z)f - (\hbar/i)(\partial/\partial z)zf = i\hbar f$$

med produktregel for derivasjon.

**12**) **A**: Dreieimpulsens $z$-komponent er $L_z = xp_y - yp_x$, dvs $\widehat{L}_z = x\widehat{p}_y - y\widehat{p}_x$. Her kommuterer begge ledd med $z$.

**13**) **C**: Hamiltonoperatoren inneholder $\nabla^2$, og her vil de tre kartesiske leddene i $\widehat{H}$ påvirke $\psi$ helt likt: trekke ut en faktor $k^2$ og skifte fortegn. Dermed blir $\widehat{H}\psi = (3\hbar^2 k^2/2m)\psi$.

**14**) **C**: Tilstand A har fire nullpunkter, tilstand C har to nullpunkter, og tilstand B har ingen nullpunkter. Dermed B, C, A fra lavest til høyest energi.

**15**) **A**: Tilstand A har plass til en halv bølgelengde mellom $x = 0$ og $x = 5$ nm og tre halve bølgelengder mellom $x = 5$ nm og $x = 7$ nm. Det betyr at $\lambda_b = 10$ nm der $V = V_0$ ($b$ for barriereområde) mens $\lambda_w = 4/3$ nm der $V = 0$ ($w$ for brønnområde, "well"). Partikkelens kinetiske energi er proporsjonal med $k^2$, dvs omvendt proporsjonal med $\lambda^2$. Dermed har vi $E/(E - V_0) = (10/(4/3))^2 = (15/2)^2 = 225/4$, dvs $E = 225E/4 - 225V_0/4$, dvs $221E/4 = 225V_0/4$, dvs $E = 225V_0/221 = 1.018V_0 \simeq 0.814$ eV.

**16**) **A**: Fra figuren ser vi at det er plass til ca 3 kvarte bølgelengder på 2 nm der $V = V_0$, dvs $\lambda_b \simeq 8/3$ nm, mens bølgelengden $\lambda_w$ er (som i oppgave 15) ca 4/3 nm der $V = 0$. Partikkelens kinetiske energi er proporsjonal med $k^2$, dvs omvendt proporsjonal med $\lambda^2$. Dermed har vi $E/(E - V_0) \simeq 4$, dvs $E \simeq 4E - 4V_0$, dvs $3E \simeq 4V_0$, dvs $E \simeq 4V_0/3 \simeq 1.3V_0$.

**17**) **C**: Tilstanden $\psi(x)$ har seks nullpunkter og er (i et endimensjonalt potensial som her) følgelig 6. eksiterte tilstand, dvs 6 tilstander med lavere energi.

**18**) **B**: Siden $\psi(x)$ er (praktisk talt) lineær i området $0 < x < 1.0$ nm, er $\psi''(x) = 0$ her, og energien er $E \simeq 1.0$ eV, dvs lik verdien av potensialet i dette området.

**19**) **D**: Klassisk venderadius $r_2$ når $E_2 = V(r_2) = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r_2$. Fra formelarket har vi $E_2 = -\hbar^2/8ma_0^2$, slik at

$$r_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{8ma_0^2}{\hbar^2} = \frac{\hbar^2}{ma_0} \cdot \frac{8ma_0^2}{\hbar^2} = 8a_0.$$

**20**) **A**: Blant de aktuelle svaralternativene gir $r = a_0$ den største verdien for $\rho_{200}$. Globalt maksimum er i $r = 0$. Avstanden $r = 4a_0$ er et lokalt maksimum.

**21**) **B**: Ser umiddelbart at $\psi_{200} = 0$ for $r = 2a_0$.

**22**) **B**: Vi får et bidrag $(n + 1/2)\hbar\omega$ til energien for hver av de to dimensjonene. Total energi blir dermed $E = (N + 1)\hbar\omega$, med $N = n_x + n_y = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Med 2 like kvantetall (f eks (11)) er det kun 1 mulighet. Med 2 ulike kvantetall (f eks (10)) er det 2 muligheter. Vi skal finne ut hvor mange ulike tilstander vi har for $N \leq 4$. Vi teller opp:
$N = 0$: (00).
$N = 1$: (10), (01).
$N = 2$: (11), (20), (02).
$N = 3$: (21), (12), (30), (03).
$N = 4$: (31), (13), (22), (40), (04).
I alt $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

**23**) **D**: Vi bruker formelarket og finner at

$$\psi_{03}(0, y) \sim (8\eta^3 - 12\eta)\exp(-\eta^2/2),$$

med $\eta = y/\sqrt{\hbar/m\omega}$. Denne funksjonen er lik null for $\eta = 0$ og $\eta = \pm\sqrt{3/2}$, dvs for $y = 0$ og for $y = \pm\sqrt{3\hbar/2m\omega}$.

**24**) **B**: Lavest mulig total energi med 6 elektroner har vi når 2 elektroner okkuperer tilstanden (00) (et med spinn opp, et med spinn ned) og 2 elektroner okkuperer hver av de to tilstandene (10) og (01). Total energi: $2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10$ dvs $10\hbar\omega$.

**25**) **B**: Her har vi en flate med areal $4 \cdot 10^{-14}$ m$^2$, så med den oppgitte antallstettheten $10^{15}$ pr m$^2$, betyr det at vi har ca 40 elektroner. Vi trenger da 20 romlige tilstander (to elektroner i hver romlig tilstand, et med spinn opp og et med spinn ned). Lager vi oss et koordinatsystem med $n_x$ og $n_y$ langs de to aksene, innser vi at hver mulige kombinasjon av $n_x$ og $n_y$, dvs hver enkelt romlige tilstand, opptar et areal lik 1 i den positive kvadranten ($n_x > 0$ og $n_y > 0$). Det betyr at vi med 40 elektroner vil okkupere samtlige tilstander på kvartsirkelen med radius $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$, dvs med areal $\pi n^2/4$. Med areal 1 pr romlig tilstand har vi dermed $\pi n^2/4 = 20$. Denne verdien av $n^2$ tilsvarer nettopp den maksimale energien som vi er på jakt etter her: $E_F = n^2\pi^2\hbar^2/2m_eL^2$, som med $n^2 = 80/\pi$ blir $E_F = 80\pi \cdot (1.05 \cdot 10^{-34})^2/2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^{-14} = 3.8 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J} = 0.24\,\mathrm{meV}$.
(Hvis en innser at maksimalverdien av $n_x^2 + n_y^2$ må være av størrelsesorden antall elektroner, eller antall romlige tilstander, finner en raskt ut at $E_F$ må bli omtrent så stor.)

**26**) **C**: Egenverdiene til $\widehat{\boldsymbol{L}}^2$ er $l(l+1)\hbar^2$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Klormolekylets treghetsmoment er

$$I = 2m_{\mathrm{Cl}}(d/2)^2 = 70.9 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot (0.10 \cdot 10^{-9})^2 = 1.18 \cdot 10^{-45}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Da blir $\Delta K = K_1 - K_0 = 2\hbar^2/2I = 9.37 \cdot 10^{-24}$ J $= 59$ $\mu$eV.

**27**) **D**: Nær bunnen (ved $x = d$) er Morse–potensialet tilnærmet harmonisk:

$$V_M(x) \simeq V_0\,(1 - 1 + \kappa(x-d))^2 = \kappa^2 V_0 (x-d)^2.$$

Setter vi dette lik $(1/2)m\omega^2(x-d)^2$ (der $m$ er molekylets reduserte masse, $m = m_{\mathrm{Cl}}/2$), har vi sammenhengen

$$\hbar\omega = \hbar\kappa\sqrt{2V_0/m} = 1.05 \cdot 10^{-34} \cdot 22.0 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2 \cdot 2.10 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}/0.5 \cdot 35.45 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}} = 1.10 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J} = 69\,\mathrm{meV}$$

**28**) **C**: De tre stasjonære punktene (dvs to energiminima samt transisjonstilstanden) finner vi ved å derivere $E(x)$ og sette lik null: $dE/dx = E_0(-\sin x - (1/5)\cos x)\exp(-x/5) = 0$, dvs $\tan x = -0.2$. Invers tangens til $-0.2$ på kalkulatoren gir (trolig) $-0.1974$, og siden tangensfunksjonen er periodisk med periode $\pi \simeq 3.1416$, betyr det at vi mellom $x = 1$ og $x = 11$ har de tre stasjonære punktene $x = 2.9442, 6.0858, 9.2274$. Oppgaven sier at reaksjonen starter i et lokalt energiminimum og går via en transisjonstilstand til et globalt energiminimum. Da må $x = 6.0858 \simeq 6.1$ tilsvare transisjonstilstanden.

**29**) **B**: Vi regner ut energien i de tre stasjonære punktene: $E(2.9442) \simeq -272$ meV, $E(6.0858) \simeq 145$ meV og $E(9.2274) \simeq -77$ meV. Det betyr at $x = 9.2274$ er begynnelsestilstanden mens $x = 2.9442$ er slutt-tilstanden. Aktiveringsenergien er følgelig $145 - (-77)$ meV $= 222$ meV.

**30**) **A**: Frigitt energi pr reaksjon er $-77 - (-272) = 195$ meV.

**31**) **B**: Med null potensial (utenfor barrieren) har vi $E = K = p^2/2m_e = \hbar^2k^2/2m_e$, som med $k = 1.26 \cdot 10^9$ pr m gir $E = 60$ meV.

**32**) **E**: Hvis $E < V_0$, er barriereområdet et klassisk forbudt område, med eksponentialfunksjoner (evt hyperbolske funksjoner) som generell løsning: $\psi_b(x) = a\exp(\kappa x) + b\exp(-\kappa x)$, med $\kappa =$

$\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}$.

**33**) **B**: Med $j$ fra formelarket finner vi $j_i = \hbar k/m$, $j_r = -|r|^2\hbar k/m$ og $j_t = |t|^2\hbar k/m$. Basert på kravet om sannsynlighetsbevarelse tolkes dermed $R = |j_r/j_i| = |r|^2$ og $T = |j_t/j_i| = |t|^2$ som sannsynligheten for henholdsvis refleksjon og transmisjon, slik at $R + T = 1$.

**34**) **B**: Kontinuerlig $\psi$ og $d\psi/dx$ overalt.

**35**) **A**: Med $E = V_0$ er $q = 0$ og $\sin qL = 0$, men slik at $\sin^2(qL)/q^2 = (qL)^2/q^2 = L^2$. Dermed er $T(E = V_0) = (1 + k^2L^2/4)^{-1}$, som med $k = 1.26$ pr nm og $L = 4.0$ nm blir lik $1/(1 + 6.35) \simeq 0.14$.

**36**) **B**: $T = 1$ når $\sin qL = 0$ (med $q > 0$), dvs $qL = n\pi$, slik at minste energiverdi som gir $T = 1$ blir $E = V_0 + (\pi\hbar/L)^2/2m_e = 230 + 23 = 253$ meV.

**37**) **E**: Med $E \ll V_0$ er $k \ll \kappa$, slik at faktoren $(k/\kappa + \kappa/k)^2 \simeq \kappa^2/k^2 \gg 1$. Videre, med $\kappa L \gg 1$, er $\sinh^2 \kappa L \simeq \exp(2\kappa L)/4$. Dermed er $T \simeq (16k^2/\kappa^2)\exp(-2\kappa L)$, dvs inntrengningsdybden blir $\xi = 1/2\kappa = 1/2\sqrt{2m_e(V_0 - E)/\hbar^2}$, som med oppgitte tallverdier er 0.22 nm.

**38**) **D**: I grensen $L \to 0$, $V_0 \to \infty$ med endelig $\beta = V_0 L$, blir $\kappa \gg k$, slik at $(k/\kappa + \kappa/k)^2 \simeq \kappa^2/k^2$. Men her vil $\kappa L \to 0$, siden $\kappa \sim \sqrt{V_0}$, med den følge at $\sinh^2 \kappa L \simeq \kappa^2 L^2$. Dermed er $T \simeq (1 + \kappa^4 L^2/4k^2)^{-1}$. Her er $\kappa^4 L^2 = (2m_e V_0 L/\hbar^2)^2 = (2m_e\beta/\hbar^2)^2$, og med $k^2 = 2m_e E/\hbar^2$ får vi endelig at $T = (1 + E_\delta/E)^{-1}$, med $E_\delta = m_e\beta^2/2\hbar^2$.

**39**) **C**: Bølgelengden som tilsvarer energi 55 meV er 5.2 nm. Dette er litt mer enn det som tilsvarer en stående bølge inne mellom de to barrierene, på brønnbredden 4.5 nm, dvs med en hel bølgelengde på brønnens bredde.

**40**) **D**: Her ser det ut til at elektronet interfererer med seg selv på en slik måte at det oppstår destruktiv interferens i bakoverretning og konstruktiv interferens i foroverretning. Det er rimelig at dette inntreffer når partikkelens bølgelengde tillater stående bølger, over enkeltbarrierens utstrekning $L$ i oppgave e) og over brønnens utstrekning på 45 Å i denne oppgaven. Med slike bølgelengder kan vi se for oss bølger som reflekteres gjentatte ganger ved endene av nevnte områder før de til slutt slipper ut den ene eller andre veien, og da med en fase som gir utslokning bakover ($R = 0$) og forsterkning framover ($T = 1$). Vi kan betrakte dette som en endimensjonal variant av retningsavhengig interferens når en bølge passerer en dobbeltspalte eller et diffraksjonsgitter.
Dissipasjon har å gjøre med irreversible prosesser der en eller annen form for "ordnet energi" (for eksempel mekanisk energi) omdannes til "uordnet energi" (varme).