TFY4215 Innføring i kvantefysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Testeksamen.

Oppgave 1
Her er kinetisk energi betydelig mindre enn pc, 0.318 vs 4.49 GeV. Da kan vi nok regne ikke-relativistisk, med $K = mv^2/2$ og $p = mv$, for da er jo $pc = mvc$ mye større enn $mv^2/2$, dvs $v \ll c$. Vi finner $m = p^2/2K$ med $p = 2.395 \cdot 10^{-18}$ kg m/s og $K = 5.088 \cdot 10^{-11}$ J, dvs $m = 5.635 \cdot 10^{-26}$ kg, dvs $m = 34u$.
Riktig svar: B.

Oppgave 2
Normering av bølgefunksjonen betyr at

$$\int_0^L |\Psi(x,0)|^2 \, dx = 1.$$

Her er integranden symmetrisk om $x = L/2$, så vi kan integrere fra $x = 0$ til $x = L/2$ og multiplisere med 2. Funksjonen $\cos(\pi x/L)$ er positiv for $0 < x < L/2$. Dermed:

$$2C^2 \int_0^{L/2} \left(1 - \cos\frac{\pi x}{L}\right)^2 dx = 1.$$

Integranden her er $1 - 2\cos(\pi x/L) + \cos^2(\pi x/L)$. Integralet av 1 er $L/2$. Integralet av $-2\cos(\pi x/L)$ er $-2L/\pi$. Og integralet av $\cos^2(\pi x/L)$ er $L/4$, da middelverdien av kvadratet av cosinus (eller sinus) over en hel periode er 1/2. Alt i alt:

$$2C^2 \left(L/2 - 2L/\pi + L/4\right) = 0.22676 C^2 L = 1.$$

Med $L = 49 \cdot 10^{-10}$ m blir $C = 2.1/\sqrt{L} = 2.1/\sqrt{49 \cdot 10^{-10}} = 30 \cdot 10^3$ m$^{-1/2}$, som er det samme som 30 i enheten mikrometer opphøyd i $-1/2$.
Riktig svar: F.

Oppgave 3
Den gitte starttilstanden $\Psi(x,0)$ er symmetrisk og uten nullpunkter på intervallet $0 < x < L$. Da må det være grunntilstanden $\psi_1(x) = \sqrt{2/L}\sin(\pi x/L)$ som bidrar mest til $\Psi(x,0)$. Og grunntilstandsenergien er her $E_1 = \pi^2\hbar^2/2m_eL^2 = 16$ meV.
(Jeg fant en sannsynlighet $P_1 \simeq 0.89$ for å måle E_1.)
Riktig svar: A.

Oppgave 4
Med 2 elektroner i hver av orbitalene $\psi_1(x)$, ..., $\psi_9(x)$ ser vi fra figuren at de to mest energirike elektronene har energi i underkant av -12.5 eV. Siden $E > 0$ tilsvarer at et elektron er frigjort fra molekylet, konkluderer vi med at ionisasjonsenergien er 12.7 eV.
Riktig svar: B.

Oppgave 5
Vi teller 16 nullpunkter. Da er dette $\psi_{17}(x)$.
Riktig svar: F.

Oppgave 6
De 9 okkuperte orbitalene har energier mellom ca -34 eV og ca -13 eV og ligger noe tettere for lave enn for høye energier. Et ikke urimelig estimat av gjennomsnittlig energi pr elektron kan derfor være ca -25 eV. Med 18 elektroner gir dette et estimat på -450 eV for total energi. Da skal det mye til at alternativ C er feil.
Riktig svar: C.

Oppgave 7
Molekylets maksimale treghetsmoment finner vi mhp en akse normalt på molekylets plan, med S-atomet i massesenteret og dermed på aksen:

$$I_{\text{max}} = 3m_{\text{O}}d^2 = 1.6 \cdot 10^{-45}\ \text{kgm}^2.$$

Energiforskjellen mellom laveste og nest laveste rotasjonstilstand er

$$\Delta E = \hbar^2/I_{\text{max}} = 6.86 \cdot 10^{-24}\ \text{J}.$$

Dette tilsvarer fotonets energi $h\nu = hc/\lambda$. Fotonets bølgelengde er dermed

$$\lambda = hc/\Delta E = 2.9\ \text{cm}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 8
Med $l = 1$ er sentrifugalbidraget til det effektive potensialet $\hbar^2/mr^2$, slik at det effektive potensialet er

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\hbar^2}{mr^2}.$$

Venderadier der $E = V_{\text{eff}}(r)$ som med $E = 5\hbar\omega/2$ blir hhv 0.662 og 2.136 i enheten $\sqrt{\hbar/m\omega}$. (Vi må løse en andregradsligning i r^2.)
Riktig svar: D.

Oppgave 9
Når operatoren for S_x virker på χ_x, får vi en søylevektor med b øverst og a nederst. Dermed må vi ha $b = a$ for at χ_x skal være en egenvektor til denne operatoren. Deretter gir normering $|c|^2 \cdot 2|a|^2 = 1$, dvs $c = 1/\sqrt{2}|a|$.
Riktig svar: D.

Oppgave 10
Klassisk tillatt område der $E_n > V_{\text{eff}}^l$, dvs klassiske venderadier der $E_n = V_{\text{eff}}^l$. Det gir

$$r = \rho a_0 = n^2 a_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - l(l+1)/n^2}\right).$$

Med $n = 6$ og $l = 5$ blir dette

$$r = 36a_0 \left(1 \pm \sqrt{1/6}\right),$$

og kuleskallet mellom disse to radiene har et volum

$$v = \frac{4\pi}{3}\left(r_y^3 - r_i^3\right),$$

der $r_y \simeq 50.7a_0$ og $r_i \simeq 21.3a_0$ er hhv ytre og indre venderadius. Det gir $v \simeq 7.48 \cdot 10^{-26}\ \text{m}^3 = 74.8\ \text{nm}^3$.
Riktig svar: F.