TFY4215 Innføring i kvantefysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Øving 2.

Oppgave 1
Bundne tilstander i He^+-ioner har energi $E_n = -Z^2 \cdot 13.6/n^2$ eV, med $Z = 2$ for helium. Eksitasjon fra grunntilstanden ($n = 1$) til 1. eksiterte tilstand ($n = 2$) gir størst mulig bølgelengde, slik at $\lambda = c/\nu = hc/(E_2 - E_1)$. I helium er $E_2 - E_1 = 40.8$ eV, slik at $\lambda = 30$ nm. Riktig svar: B.

Oppgave 2
Radien i en Bohr-bane for et "hydrogenlignende atom" (ett elektron og kjerne med Z protoner, der Z er atomnummeret) skalerer med $1/Z$, slik at Li^{2+} har en grunntilstand med Bohr-bane-radius lik $52.9/3 = 18$ pm. Riktig svar: D.

Oppgave 3
Energinivåene skalerer med Z^2. Tilsvarende ionisasjonsenergi i H-atomet er 13.6 eV. Dermed $13.6 \cdot 9 = 122$ eV. Riktig svar: A.

Oppgave 4
Midlere kinetiske translasjonsenergi ved temperatur T er $K = 3k_BT/2$ ($k_BT/2$ pr kvadratiske frihetsgrad). Videre er $K = p^2/2m$, mens de Broglie-bølgelengden er $\lambda = h/p$. Kombinerer vi dette, finner vi at termisk de Broglie-bølgelengde er $\lambda = h/\sqrt{3mk_BT}$. Riktig svar: C.

Oppgave 5
De raskeste elektronene tilsvarer $n = 1$ og $r_1 = a_0 \simeq 0.529$ Å:

$$v_1 = \sqrt{e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e a_0} \simeq 2.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 6
Med $\lambda = 0.4$ nm og elektronmassen for m blir T ca 70000 K. Riktig svar: E.

Oppgave 7

$$1 = |A|^2 \cdot 2 \cdot \int_0^\infty e^{-2\kappa x}\, dx = |A|^2/\kappa,$$

slik at $A = \sqrt{\kappa}$. (Eventuelt $\sqrt{\kappa}\exp(i\beta)$ med reell β.) Riktig svar: D.

Oppgave 8
Pga symmetri er $\langle x \rangle = 0$. Dermed er

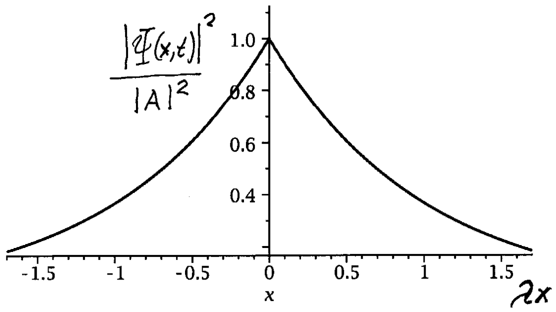
$$\begin{aligned}
(\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle = 2\kappa \int_0^\infty x^2 e^{-2\kappa x} dx \\
&= \int_0^\infty 2x e^{-2\kappa x} dx \\
&= \int_0^\infty (1/\kappa)\, e^{-2\kappa x} dx \\
&= 1/2\kappa^2,
\end{aligned}$$

slik at $\Delta x = 1/\sqrt{2}\kappa$. Riktig svar: A.

Oppgave 9
Her kombinerer vi symmetrisk Ψ (og Ψ^*) med antisymmetrisk operator (d/dx) slik at vi må ha $\langle p \rangle = 0$. Riktig svar: A.

Løsning OPPGAVE 1

a.



Vi merker oss at sannsynlighetstettheten, $|\Psi(x,t)|^2 = A^2 e^{-2\lambda|x|}$, er symmetrisk med hensyn på origo. For normeringsintegralet finner vi da

$$1 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda|x|} dx = 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2\lambda x} dx = \frac{2A^2}{2\lambda}.$$

Vi må altså ha $A = \sqrt{\lambda}$. [Merk: Dersom du ønsker å regne ut den delen av integralet som går fra $x = -\infty$ til $x = 0$ så må du passe på å sette $|x| = -x$ i denne delen.]

b. Pga den nevnte symmetrien er forventningsverdien for posisjonen x gitt ved $\langle x \rangle = 0$. [1] Forventningsverdien av x^2 finner vi slik:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x,t)|^2 dx = 2A^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2\lambda x} dx = 2\lambda \frac{2!}{(2\lambda)^3} = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

c. Standardavviket (her kalt usikkerheten) blir da

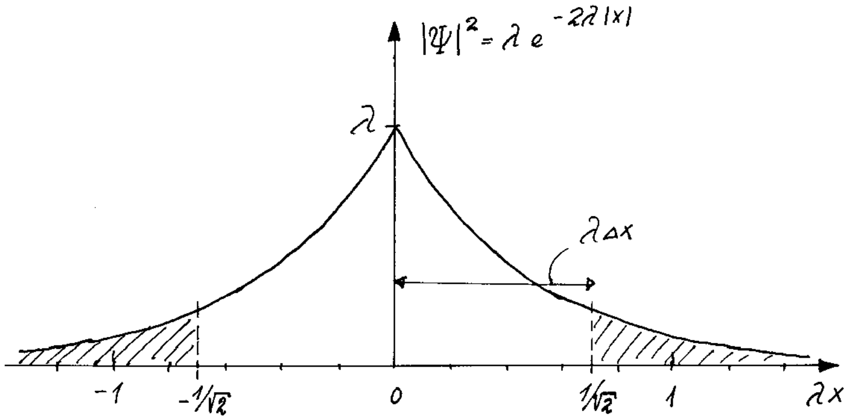
$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}.$$

Sannsynligheten for å finne partikkelen utenfor intervallet $(\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x)$ er

$$P_{|x|>\Delta x} = 2\int_{\Delta x}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 2\lambda \int_{\Delta x}^{\infty} e^{-2\lambda x} dx = e^{-\sqrt{2}} = 0.243.$$

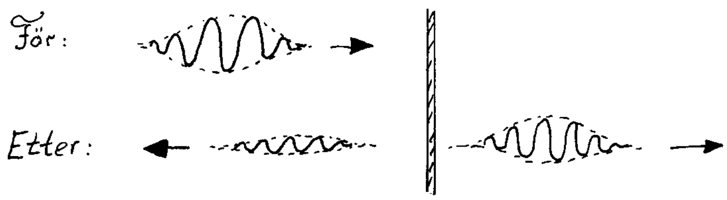
Bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$ i denne oppgaven er faktisk en løsning av Schrödingerligningen, $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x))\Psi$, for et merkelig potensial $V(x)$. Men det skal vi (eventuelt) komme tilbake til. [Når ψ har en "knekk", får den deriverte et sprang og den andrederiverte vil da gå som en deltafunksjon; jf Appendix B i Hemmer. Det aktuelle potensialet må altså inneholde en deltafunksjon.]

[1] Dette er et poeng som du i Espen Askeladds ånd bør ta med deg i "sekken", og bruke neste gang du kommer ut for en sannsynlighetsfordeling som er symmetrisk med hensyn på et gitt punkt.



Etter litt trening er det en fordel om en kan utvikle et visst "snekker-skjønn" når det gjelder å *anslå* både forventningsverdier og usikkerheter.

Løsning OPPGAVE 2 **Fotoner mot et vindu**



Her bør vi hente inspirasjon fra dobbeltspalt-forsøket: For det første gir Maxwells ligninger et bølgemønster og en intensitetsfordeling som brer seg over et stort vinkelområde bak de to spaltene. For det andre: Om vi sender bare ett foton mot spaltene, så blir ikke dette smurt utover skjermen i henhold til intensitetsfordelingen, men tvert imot observert i et punkt. Konklusjonen var at intensitetsfordelingen som følger fra Maxwell må oppfattes som en sannsynlighetsfordeling.
Tilsvarende blir fotonet som sendes mot vinduet *ikke* delt i to (slik bølgegruppen blir); det blir *enten* reflektert *eller* transmittert. Teorien kan ikke forutsi hvilket av disse utfallene vi får. Det teorien *kan* forutsi, er at *sannsynligheten* for refleksjon er 4%, mens sannsynligheten for transmisjon er 96%. Dette kan etterprøves eksperimentelt ved å sende et stort antall fotoner mot vinduet (eller som vi sier, ved å bruke et *ensemble* av fotoner).