TFY4215 Innføring i kvantefysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Øving 6.

Oppgave 1

$$\langle V\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V(x)|\psi(x)|^2 dx = -\beta^2/\hbar^2 = 2E,$$

siden deltafunksjonen i $V(x)$ bare "plukker opp" $|\psi(0)|^2 = 1$. Riktig svar: D.

Oppgave 2
Argumentet til deltafunksjonen er null i $x = 2$, som inkluderes i integrasjonsområdet. Dermed blir integralet $2^3 - 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 1 = 1$. Riktig svar: D.

Oppgave 3
Starttilstanden $\Psi(x,0)$ er symmetrisk på intervallet $0 < x < L$. Dermed:

$$1 = 2\int_0^{L/2} \Psi^2(x,0)\,dx = 2A^2\cdot(1/3)\cdot(L/2)^3 = A^2L^3/12,$$

slik at $A = 2\sqrt{3}/L\sqrt{L}$. Riktig svar: B.

Oppgave 4
$\Psi(x,0)$ ligner veldig på $\psi_1(x) = \sqrt{2/L}\sin(\pi x/L)$, så vi forventer at c_1 ikke er så mye mindre enn 1. De tre alternativene C, D og E er henholdvis ca 0.14, 0.53 og 0.99, så vi mistenker at alternativ E er riktig.
La oss regne ut c_1. Siden $\psi_1(x)$ er symmetrisk og reell, har vi

$$c_1 = 2\int_0^{L/2} \psi_1(x)\Psi(x,0)dx = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{L\sqrt{L}}\int_0^{L/2} x\sin(\pi x/L)dx.$$

Vi bruker delvis integrasjon og finner at integralet har verdien $(L/\pi)^2$, slik at $c_1 = 4\sqrt{6}/\pi^2$. Riktig svar: E.

Oppgave 5
$\psi_2(x)$ er antisymmetrisk på $(0, L)$, slik at $c_2 = 0$. Riktig svar: A.

Oppgave 6
Med c_1 bare litt mindre enn 1 blir $\langle E\rangle$ litt større enn E_1. Riktig svar: B.

Oppgave 7

$$\langle p\rangle_{t=0} = \int_0^L \Psi^*(x,0)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\Psi(x,0)dx = 0$$

siden integranden er antisymmetrisk. Symmetrien i problemet tilsier vel at dette ikke kan endre seg for $t > 0$ (?!) Riktig svar: C.

Oppgave 8
$K = 200$ keV $= 200\cdot 10^3\cdot 1.6\cdot 10^{-19}$ J $= 32$ fJ. (f = femto = 10^{-15}.) Riktig svar: D.

Oppgave 9
Elektroner har hvileenergi $E_0 = m_ec^2 \simeq 0.51$ MeV. Med kinetisk energi $K = 0.200$ MeV bør vi nok her regne relativistisk, og siden total energi, dvs summen av hvileenergi og kinetisk energi, er

$E = \gamma m_e c^2$, er kinetisk energi $K = (\gamma - 1) m_e c^2$. Her er $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Vi løser med hensyn på v og finner at $v = c\left[1 - (1 + K/m_e c^2)^{-2}\right]^{1/2} = 0.695\, c$. Riktig svar: A.

Oppgave 10
$\lambda = h/p$ med (relativistisk) impuls $p = \gamma m v$. Med v fra forrige oppgave blir $\lambda = 2.5$ pm. Riktig svar: E.

Løsning OPPGAVE 12

a. ♠

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx &= f(0) \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-c) g(x) dx &= g(c); \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(Ax+B) dx &= B; \\
\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x-a) + \delta(x-b)] f(x) dx &= f(a) + f(b); \\
\int_{-1}^{4} [\delta(x-1) + \delta(x+3)] g(x) dx &= g(1); \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x) f(x) dx &= \tfrac{1}{2} f(0); \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3x-6) f(x) dx &= \tfrac{1}{3} f(2); \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixa} dx &= \delta(a); \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixa} dx &= \delta(-a) = \delta(a); \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixa} da &= \delta(x); \qquad \text{(NB! Integrasjon over } a\text{)} \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{if_1 f_2} df_1 &= \delta(f_2); \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\delta(x-x'') dx &= \delta(x'-x'') \qquad .
\end{aligned}
$$

b. ♠Her er vel oppgaveteksten selvforklarende.