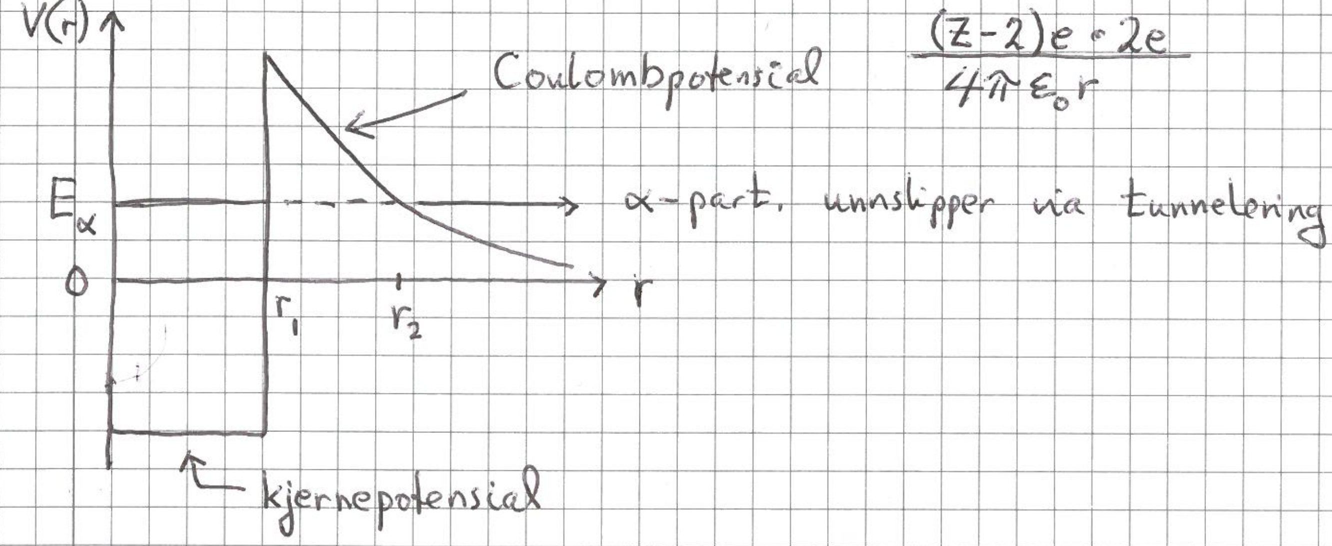
Kjernereaksjoner

$^4_2He^{2+}$ (= α-partikkel) som dannes i (stor) atomkjerne føler sterkt tiltrekkende kjernekrefter og "relativt sterkt" frastøtende Coulombkrefter.

Modellpotensial (Gamow 1928):



$$\frac{(Z-2)e \cdot 2e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Eks: $^{212}_{84}Po \rightarrow {}^{208}_{82}Pb + \alpha$; levetid ca $0.3\,\mu s$; $E_\alpha \approx 9\,MeV$

$Z = 84$, $r_1 \approx 6\,fm \Rightarrow V(r_1) \approx 6.3 \cdot 10^{-12}\,J \approx 39\,MeV$

$$T \sim \exp\left\{-\frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{V(r)-E_\alpha}\,dr\right\} \quad ; \quad V(r_2) = E_\alpha$$

$$\approx \exp\{-44.4\} \approx 5 \cdot 10^{-20}$$

$$v \approx \sqrt{2E_\alpha/m_\alpha} = 2 \cdot 10^7\ m/s$$

$$\Rightarrow f = t^{-1}_{kollisjon} = v/2r_1 \approx 2 \cdot 10^{21}\ s^{-1}$$

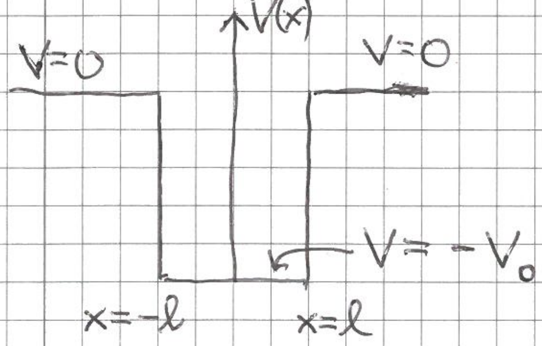
= antall ganger α-part. prøver å unnslippe pr sek.

$\Rightarrow f \cdot T \approx 10^2\ s^{-1}$ = unnslippsraten

$\Rightarrow \tau = 0.01\,s$ = estimert levetid (der vi bommet med faktor ca 10^5, pga manglende prefaktor i T, og kanskje litt høg barriere)

Deltafunksjonspotensial

[PCH 3.4; DJG 2.5; IØ 3.3] [PCH App B; IØ 24.f]



Grensetilfellet $V_0 \to \infty$, $l \to 0$ med endelig verdi for produktet $V_0 \cdot 2l$ ("dybde × bredde") kan beskrives med Diracs δ-funksjon, $\delta(x)$.

Definisjon: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$ ($f(x)$ kontinuerlig i $x=0$)

Med $f(x)=1$: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$

Kun $f(0)$ påvirker verdien av $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx$

$\Rightarrow$ må ha $\delta(x) = 0$ når $x \neq 0$

Hvis $\delta(0) < \infty$, blir da $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow$ må ha $\delta(0) = \infty$

Vi kan representere $\delta(x)$ med "normale funksjoner" $\delta_\varepsilon(x)$, og la $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x)$.

Eks 1: $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & ; \quad |x| \le \varepsilon/2 \\ 0 & ; \quad |x| > \varepsilon/2 \end{cases}$

Da er $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty & ; \quad x=0 \\ 0 & ; \quad x \neq 0 \end{cases}$, som påkrevd

og $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2\varepsilon/2 = 1$, — " —.

Eks 2:

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2\pi i x}\Big|_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{\pi x}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{ix/\varepsilon} - e^{-ix/\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi x}\cdot \sin(x/\varepsilon)$$

Oscillerer uendelig raskt når $\varepsilon \to 0$, unntatt "i $x=0$", og $\delta_\varepsilon(x) \overset{x\to 0}{\to} \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}\,dx = \mathrm{sgn}(1/\varepsilon) = 1 \quad ; \text{ OK}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk}$$

Fourier-representasjon av $\delta(x)$

Flere egenskaper:

"Substituer" $x' = -x$: $dx' = -dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(-x')(-dx') = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x')\,dx' = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(-x) = \delta(x)} \qquad \left(\Rightarrow \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ikx}\,dk\right)$$

Substituer $x' = |a|x \Rightarrow dx' = |a|dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(ax)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x'}{|a|}\right)\delta(x')\,\frac{dx'}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\frac{1}{|a|}\delta(x)\right]dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(ax) = \delta(|a|x) = \frac{1}{|a|}\delta(x)}$$

3D: $\int f(\vec{r})\,\delta(\vec{r})\,d^3r = f(0,0,0)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,\delta(\vec{r})\,dx\,dy\,dz = f(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(\vec{r}) = \delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z)}$$

Fysisk relevans av δ-funksjonen:

- Ladningstettheten $\rho(\vec{r})$ for en punktladning q i $\vec{r}=\vec{a}$:

$$\rho(\vec{r}) = q\cdot\delta(\vec{r}-\vec{a})$$

$\Rightarrow$ Total ladning: $Q = \int \rho(\vec{r})\,d^3r = q\int\delta(\vec{r}-\vec{a})\,d^3r = q$; ok.

[Tilsvarende med punktmasse, selvsagt]

- Kortvarig "puls" av et eller annet ved tidspunktet T $\sim \delta(t-T)$

δ-funksjonsnormering:

Fri partikkel med impuls p: $\psi_p(x) = C\,e^{ipx/\hbar}$

Ikke normerbar i "egentlig forstand":

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_p(x)|^2\,dx = |C|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty$$

Men vi har ortogonalitet:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_p^*(x)\,\psi_{p'}(x)\,dx = |C|^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p'-p)x/\hbar}\,dx \overset{(y=x/\hbar)}{=}$$

$$= |C|^2\hbar\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p'-p)y}\,dy = |C|^2\hbar\,\delta(p'-p)\cdot 2\pi$$

$\Rightarrow$ med $C = (2\pi\hbar)^{-1/2}$ har vi δ-funksjonsnormeringen

$$\boxed{\langle\psi_p, \psi_{p'}\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x)\,\psi_{p'}(x)\,dx = \delta(p'-p) = \delta(p-p')}$$

for tilstandene $\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$ i den kontinuerlige delen av energispekteret.

Tilbake til modellpotensialet, firkantbrønn med $V_0 \to \infty$, $l \to 0$, $\beta = V_0 \cdot 2l$ endelig. Kan nå skrives på formen

$$V(x) = -\beta\,\delta(x)$$

Merk at siden $\int \delta(x)\,dx = 1$, må <u>enheten</u> til $\delta(x)$ være $[x]^{-1}$, dvs $[\delta(x)] = 1/m$ når x er en lengde (posisjon).

Med $\beta = V_0 \cdot 2l$ blir dermed $[V(x)] = [V_0 \cdot 2l \cdot \delta(x)] = [V_0]$; OK

Når $x \neq 0$ er $V(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi \;\Rightarrow\; \psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = \kappa^2\psi$$

med akseptabel løsning for $E < 0$ ($|\psi|$ endelig ; ψ kont. i $x=0$)

$$\psi(x) = \begin{cases} C\,e^{-\kappa x} & ; \; x > 0 \\ C\,e^{\kappa x} & ; \; x < 0 \end{cases}$$

"Triks": Integrasjon av TUSL fra $-\varepsilon$ til $+\varepsilon$ og grensen $\varepsilon \to 0$ fastlegger κ, og dermed energien til den bundne tilstanden.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\psi' = \frac{2m}{\hbar^2}V(x)\psi - \frac{2m}{\hbar^2}E\psi$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d}{dx}\psi'(x)\,dx}_{=\psi'(0^+)-\psi'(0^-)} = \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(-\beta)\delta(x)\psi(x)\,dx}_{=-\frac{2m\beta}{\hbar^2}\psi(0)} - \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2m}{\hbar^2}E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)\,dx}_{=0}$$

Innsetting av $\psi(0) = C$, $\psi'(0^+) = -\kappa C$ og $\psi'(0^-) = \kappa C$

$$\Rightarrow \quad -2\kappa C = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}C$$

$$\Rightarrow \quad \kappa = \frac{m\beta}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = \underline{\underline{-\frac{m\beta^2}{2\hbar^2}}}$$

Kun <u>en</u> bundet tilstand i δ-brønnen: Fra s. 56. har vi

$$\tan(\xi\cdot k_0 l) = \begin{cases} \sqrt{1-\xi^2}/\xi & \text{(Symm)} \\ -\xi/\sqrt{1-\xi^2} & \text{(Antisymm)} \end{cases}$$

for bundne løsninger. Her er $\xi = \sqrt{|E/V_0|} < 1$ og

$$k_0 l = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{V_0}\,l = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{V_0\cdot 2l}{\sqrt{V_0}\cdot 2} = \underbrace{\frac{\sqrt{2m}\,\beta}{2\hbar}}_{\text{endelig}}\cdot\frac{1}{\sqrt{V_0}} \xrightarrow{V_0\to\infty} 0,$$

slik at 1. asymptote til $\tan(\xi\cdot k_0 l)$ ligger ved $\xi\to\infty$,

og dermed <u>bare en symmetrisk bundet tilstand</u>!

(Uansett "styrke" β på potensialet.)

Spredning på δ-potensialet er enkelt og litt pussig: (78)

$x<0$: $\psi = e^{ikx} + r e^{-ikx}$ (inn fra venstre; $E = \hbar^2 k^2/2m$)

$$\psi' = ik(e^{ikx} - r e^{-ikx})$$

$x>0$: $\psi = t e^{ikx}$

$$\psi' = ikt e^{ikx}$$

ψ kont. i $x=0$ $\Rightarrow$ $1+r = t$

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$\Rightarrow ikt - ik(1-r) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} t$$

$$\overset{r=t-1}{\Rightarrow} ikt - ik(2-t) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} t$$

$$\Rightarrow 2ikt + \frac{2m\beta}{\hbar^2} t = 2ik$$

$$\Rightarrow t = (1 + m\beta/ik\hbar^2)^{-1}$$

$$\Rightarrow T = |t|^2 = (1 + (m\beta/k\hbar^2)^2)^{-1}$$

som med $E = \hbar^2 k^2/2m$, dvs $k^2 = 2mE/\hbar^2$, gir

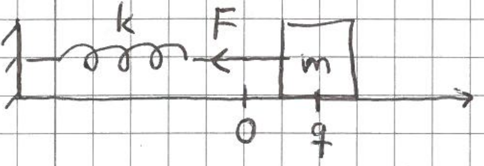
$$\underline{T(E) = (1 + m\beta^2/2E\hbar^2)^{-1}} \quad ; \quad \underline{R(E) = (1 + 2E\hbar^2/m\beta^2)^{-1}}$$

Dvs T er uavhengig av fortegnet på β

$\Rightarrow$ samme T for brønn og barriere med gitt styrke β!

Harmonisk oscillator

[PCH 3.5 ; DJG ; IØ 3.4]



$F(q) = -kq\,, \quad V(q) = \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

$q(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ (klassisk)

$\omega = \sqrt{k/m}\;;\quad E\,(= V_{max}) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

QM: $\Psi(q,t) = \psi(q)\,e^{-iEt/\hbar}$

TUSL: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\psi = E\psi \quad / \cdot(-1)$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{d(\sqrt{2m}\,q/\hbar)^2} + \left(E - \left(\frac{\sqrt{2m}\,q}{\hbar}\right)^2 \cdot \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\right)\psi = 0 \quad / \cdot \left\{\sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}}\right\}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{d(\sqrt{m\omega/\hbar}\,q)^2} + \left(\frac{E}{\hbar\omega/2} - \frac{q^2 m\omega}{\hbar}\right)\psi = 0$$

$x \equiv q\sqrt{m\omega/\hbar} \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\varepsilon - x^2)\psi = 0}$ 1D QM Harm Osc på dim. løs form

$\varepsilon \equiv E/(\hbar\omega/2)$

Siden $\left(e^{-x^2/2}\right)'' = \left(-x e^{-x^2/2}\right)' = -e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2}$,

ser vi at $\psi_0(x) = C_0 e^{-x^2/2}$ er løsning ;

$$C_0(x^2-1)e^{-x^2/2} + C_0(\varepsilon_0 - x^2)e^{-x^2/2} = 0,$$

dersom $\varepsilon_0 = 1$, dvs $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Her er ψ_0 symmetrisk og uten nullpunkter, så dette må være grunntilstanden!

(Normering: $C_0^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}_{=\sqrt{\pi}} = 1 \Rightarrow C_0 = \pi^{-1/4}$)

Men!! $\tilde{C}_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega q^2/\hbar}\, dq = 1 \Rightarrow \tilde{C}_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$

Dermed svært fristende å satse på at

$$\psi_1(x) = C_1 x e^{-x^2/2}$$

også er løsning:

$$(\psi_1)'' = (C_1 e^{-x^2/2} - C_1 x^2 e^{-x^2/2})'$$

$$= -C_1 x e^{-x^2/2} - 2C_1 x e^{-x^2/2} + C_1 x^3 e^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow C_1(x^3 - 3x)e^{-x^2/2} + (\varepsilon_1 x - x^3) C_1 e^{-x^2/2} = 0$$

$\Rightarrow$ Løsning! Med $\varepsilon_1 = 3$, dvs $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

Åpenbart 1. eksiterte tilstand: Antisymmetrisk, med ett nullpunkt!

Dermed ca like fristende å prøve

$$\psi(x) = v(x) e^{-x^2/2}$$

som generell løsning, med "enkel funksjon" $v(x)$,
f.eks. polynom (potensrekke)

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Nå er

$$\psi'' = (v e^{-x^2/2})'' = (v' e^{-x^2/2} - x v e^{-x^2/2})'$$

$$= (v'' - 2x v' - v + x^2 v) e^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow (v'' - 2xv' - v + \cancel{x^2 v} + \varepsilon v - \cancel{x^2 v}) e^{-x^2/2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v'' - 2x v' + (\varepsilon - 1) v = 0} \quad \text{Diff-ligning for } v(x)$$

Innsetting av $v = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $v' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ $\left(= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) x^k \right)$

og $v'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+1) x^k$ gir nå

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left\{ a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k \cdot 2k + a_k(\varepsilon - 1) \right\}}_{\text{Må da være null for alle } k} x^k = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{k+2} = a_k \frac{2k+1-\varepsilon}{(k+1)(k+2)} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dvs: Hvis a_0 og a_1 er kjent (via normering av ψ_0 og ψ_1), gir dette $a_2, a_4, a_6, \ldots$ fra a_0 og $a_3, a_5, \ldots$ fra a_1

For store k vil $a_{k+2}/a_k \approx 2/k$. Men da er

$v(x) \sim e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2! + \ldots = \sum_{k=0,2,4\ldots} x^k/(k/2)!$,

med $a_{k+2}/a_k = \frac{(k/2)!}{[(k+2)/2]!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k/2}{1 \cdot 2 \cdots (k/2) \cdot (\frac{k}{2}+1)} \approx \frac{2}{k}$.

Men: Da er $\psi(x) = v(x) \exp(-x^2/2) \sim \exp(+x^2/2) \xrightarrow{|x| \to \infty} \infty$, som er ufysisk!

$\Rightarrow$ Rekkene for a_k må (begge) bryte av!

$\Rightarrow$ ε må være et odde heltall

Hvis $\varepsilon = 1, 5, 9, 13, \ldots$: Da er hhv $a_2, a_4, a_6, a_8 \ldots = 0$

Må nå ha $a_1 = 0$ $(= a_3 = a_5 = \ldots)$

Hvis $\varepsilon = 3, 7, 11, \ldots$: Da er hhv $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, $a_7 = 0, \ldots$

Må nå ha $a_0 = 0$ $(= a_2 = a_4 = \ldots)$

Uansett: $\underset{\sim}{E_n} = \frac{1}{2}\hbar\omega\,\varepsilon = \frac{1}{2}\hbar\omega(2n+1) = \underset{\sim\sim}{(n+1/2)\hbar\omega}$; $n = 0, 1, 2 \ldots$

$n = 0, 2, 4, \ldots$: Symmetrisk $\psi_n(x) = v_n(x)\,e^{-x^2/2}$

$n = 1, 3, 5, \ldots$: Antisym $\psi_n(x) = v_n(x)\,e^{-x^2/2}$

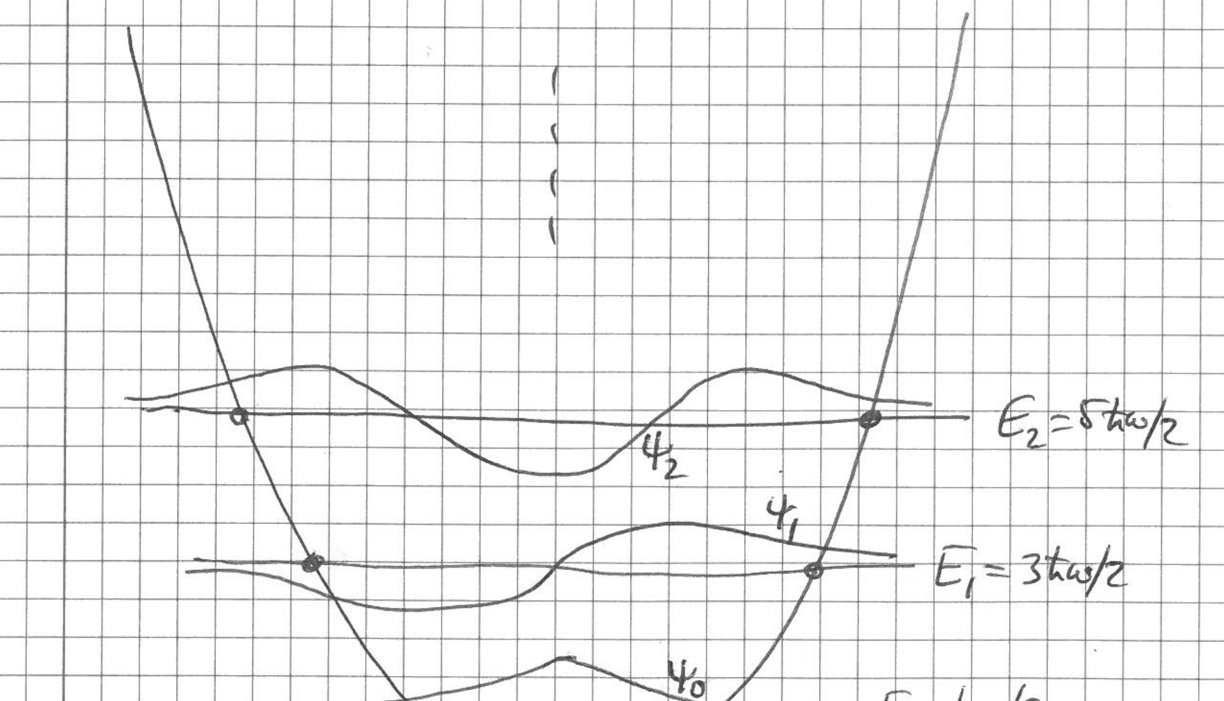
<u>Normerte</u> egenfunksjoner er (med q = posisjon)

$$\boxed{\psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-m\omega q^2/2\hbar}\, H_n\!\left(\frac{q}{\sqrt{\hbar/m\omega}}\right)}$$

Hermite-polynomer:

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$,

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$, ---



◎ Klassiske vendepunkter ($E = V$; $K = 0$)