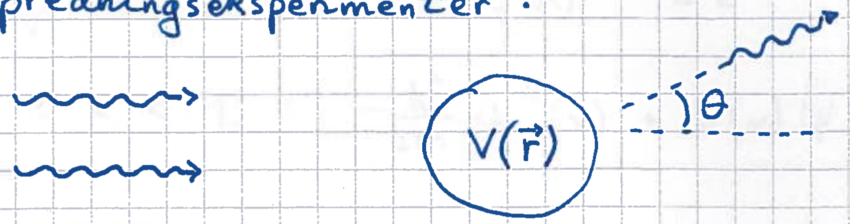
Spredning og tunneleffekt

[PCH 3.6 ; DJG 2.5–2.7 ; IØ 3.6]

Spredningseksperimenter :



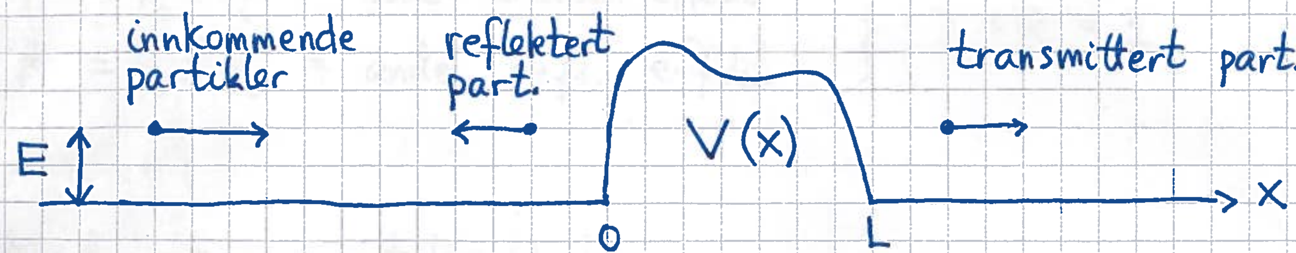
partikler / bølger inn ; energi E (pr partikkel)

system (spredningspotensial $V(\vec{r})$)

Måling av spredt intensitet som funksjon av spredningsvinkel θ og partikkelenergi E' gir informasjon om systemet.

[TFY4220, TFY4205, TFY4255, FY8102, FY8203 ...]

Vi ser på <u>elastisk</u> spredning i <u>en</u> dimensjon.



To mulige utfall for en innkommende partikkel:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Refleksjon, med sanns. } R \\ \text{Transmisjon, — " — } T \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R+T=1}$$

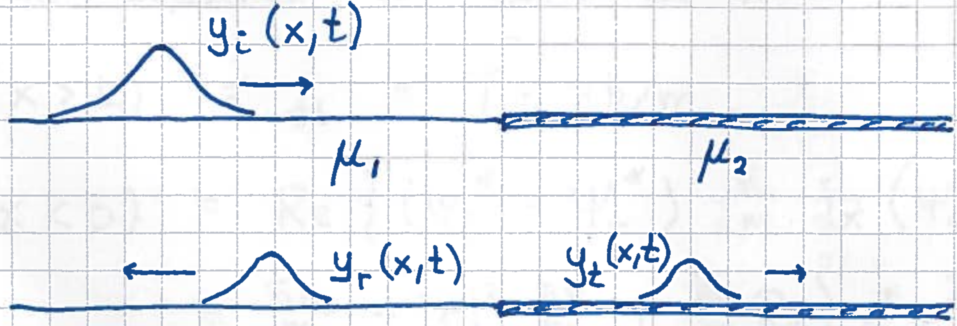
Vi antar part. inn fra venstre, impuls $p = \hbar k$ og energi $E = \hbar^2 k^2/2m$ ($V=0$ for $x<0$ og $x>L$).

Bølge inn: $\psi_i(x) = e^{ikx}$
Bølge reflektert: $\psi_r(x) = r\, e^{-ikx}$
$\Big\}$ $x < 0$

Bølge transmittert: $\psi_t(x) = t\, e^{ikx}$ $\Big\}$ $x > L$

$0 < x < L$: $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$

Klassisk analogi: Bølge på streng (μ = masse pr lengdeenhet)



Energibevarelse: $P_i = P_r + P_t$ (P = midlere effekt)

$T = P_t / P_i$ = andel transm. effekt
$R = P_r / P_i$ = andel refl. effekt
$\Big\}$ $T + R = 1$

Med plane partikkelbølger:

Sannsynlighetsbevarelse: $j_i = |j_r| + j_t$

$$j = \mathrm{Re}\left\{ \psi^* \frac{\hbar}{im} \psi' \right\}$$

$T = j_t / j_i$ = transmisjonssanns.
$R = |j_r| / j_i$ = refleksjonssanns.
$\Big\}$ $T + R = 1$

$$j_i = \mathrm{Re}\left\{ e^{-ikx} \frac{\hbar}{im} ik\, e^{ikx} \right\} = \frac{\hbar k}{m}$$

$$j_r = \mathrm{Re}\left\{ r^* e^{ikx} \frac{\hbar}{im} (-ik)\, r\, e^{-ikx} \right\} = -|r|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$j_t = \mathrm{Re}\left\{ t^* e^{-ikx} \frac{\hbar}{im} ikt\, e^{ikx} \right\} = |t|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$\Rightarrow \quad R = |r|^2 \,, \qquad T = |t|^2$$

Sanns. strømmen er uavh. av x:

$$j(x > L) = j_t = T \cdot \hbar k/m$$

$$j(x < 0) = \mathrm{Re}\left\{ (\psi_i^* + \psi_r^*) \frac{\hbar}{im} \frac{d}{dx} (\psi_i + \psi_r) \right\}$$

$$= \frac{\hbar k}{m} - |r|^2 \frac{\hbar k}{m} + \frac{\hbar k}{m} \underbrace{\mathrm{Re}\left\{ r^* e^{2ikx} - r e^{-2ikx} \right\}}_{=0}$$

$$= (1 - R) \cdot \hbar k/m$$

$$= T \cdot \hbar k/m$$

Ikke uventet, siden vi her har en stasjonær tilstand

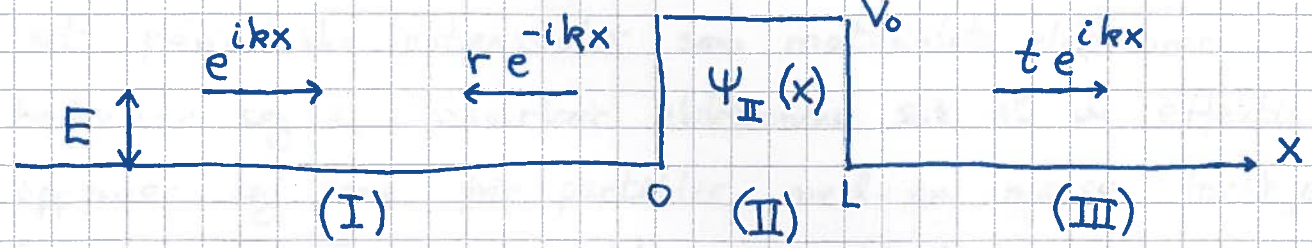
$$\Psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar}$$

med $\rho = |\Psi|^2 = |\psi(x)|^2$ uavhengig av tiden t.

Da gir kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Eks 1: Firkantbarriere



$E < V_0$: $\psi_{II}'' - \varkappa^2 \psi_{II} = 0$; $\varkappa^2 = \dfrac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

$$\psi_{II}(x) = A e^{\varkappa x} + B e^{-\varkappa x}$$

$E > V_0$: $\psi_{II}'' + q^2 \psi_{II} = 0$; $q^2 = \dfrac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$

$$\psi_{II}(x) = a e^{iqx} + b e^{-iqx}$$

Kravet om kontinuerlige ψ og ψ' i $x = 0$ og $x = L$ gir 4 ligning. som fastlegger A, B, r, t (evt a, b, r, t).

For detaljer, se notater 2016, s. 63–64. Resultat:

$$E < V_0 : \quad T = \left\{ 1 + \frac{\sinh^2\left(k_0 L \sqrt{1 - E/V_0}\right)}{4 \frac{E}{V_0} (1 - E/V_0)} \right\}^{-1}$$

$$E > V_0 : \quad T = \left\{ 1 + \frac{\sin^2\left(k_0 L \sqrt{E/V_0 - 1}\right)}{4 \frac{E}{V_0} (E/V_0 - 1)} \right\}^{-1}$$

$$k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

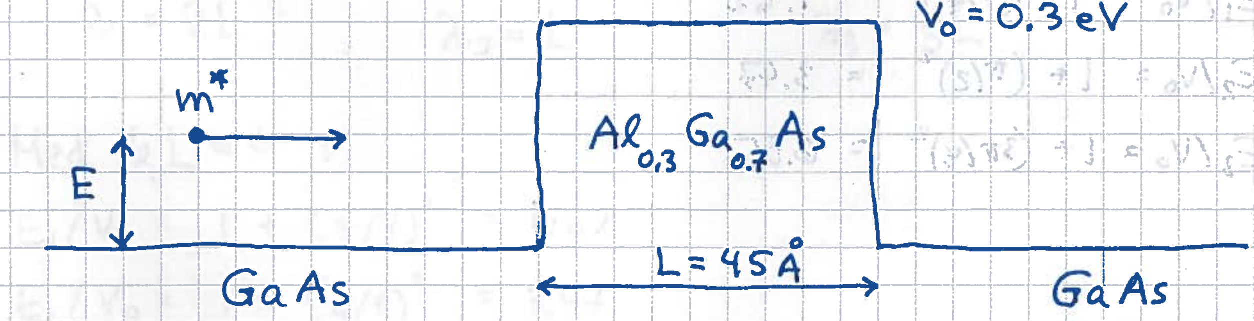
$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Eks: Tynt lag med $(Al_x Ga_{1-x})As$ mellom GaAs kontakter gir $V_0 \approx 0.3$ eV når $x \approx 0.3$.

Det periodiske potensialet som materialets elektroner befinner seg i, påvirker elektronene slik at de effektivt oppfører seg som frie partikler, med en masse forskjellig fra m_e. Typisk er elektronenes <u>effektive masse</u> $m^* \approx 0.1\, m_e$ i halvledere som GaAs og $(Al_x Ga_{1-x})As$.

Med (f.eks.) $L = 45$ Å blir da

$$k_0 L = \frac{\sqrt{2m^* V_0}\, L}{\hbar} \approx 4$$



- Tunneleffekt: $T > 0$ for $E < V_0$
- $R > 0$ også for $E > V_0$
- $\lim\limits_{E \to V_0^+} T(E) = \left\{1 + \left(\frac{k_0 L}{2}\right)^2\right\}^{-1} \underset{\text{her}}{=} 0.2$
- Hvis $E \ll V_0$ og $k_0 L \gg 1$, er

$$\sinh\left(k_0 L \sqrt{1 - E/V_0}\right) \approx \frac{1}{2} \exp\left(k_0 L \sqrt{1 - E/V_0}\right) \gg 1$$

$$\Rightarrow T(E) \approx (16E/V_0)(1 - E/V_0) \exp\left(-2k_0 L \sqrt{1 - E/V_0}\right) \ll 1$$

og T <u>avtar eksponentielt</u> med barrierehøyde og -tykkelse.

- Selv-interferens, stående bølger og resonans:

$$T = 1 \quad \text{når} \quad \sin\left(k_0 L \sqrt{E/V_0 - 1}\right) = 0$$

dvs når

$$k_0 L\sqrt{E/V_0 - 1} = L\sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2}(E - V_0)} = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow K_n = E - V_0 = \frac{\hbar^2 q_n^2}{2m^*} \quad \text{med} \quad q_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{dvs}$$

bølgelengder $\lambda_n = \frac{2\pi}{q_n} = \frac{2L}{n}$, dvs stående bølger i barriereområdet $0 < x < L$:

$n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$

$\lambda_1 = 2L$ $\quad$ $\lambda_2 = L$ $\quad$ $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$

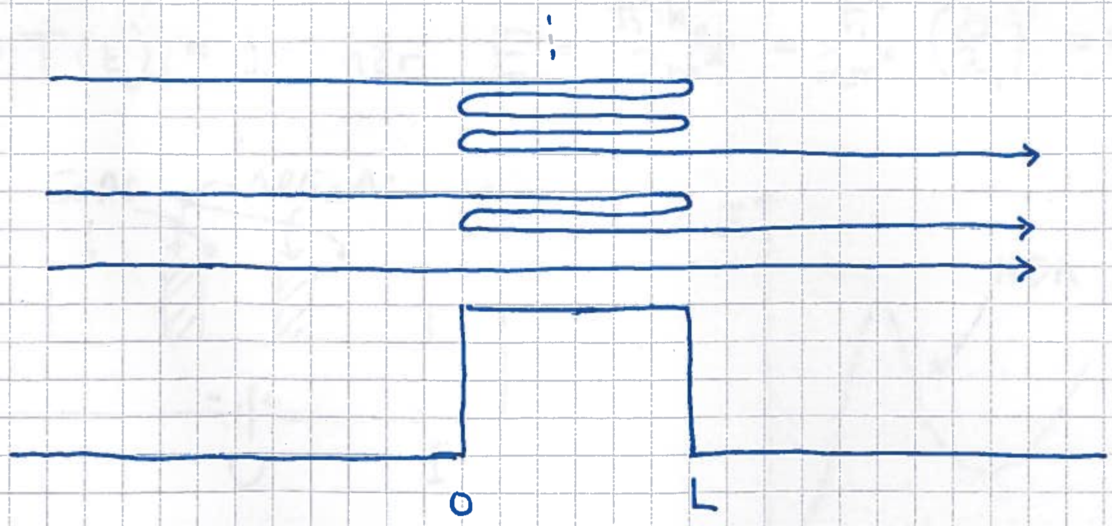
Med $k_0 L = 4$:

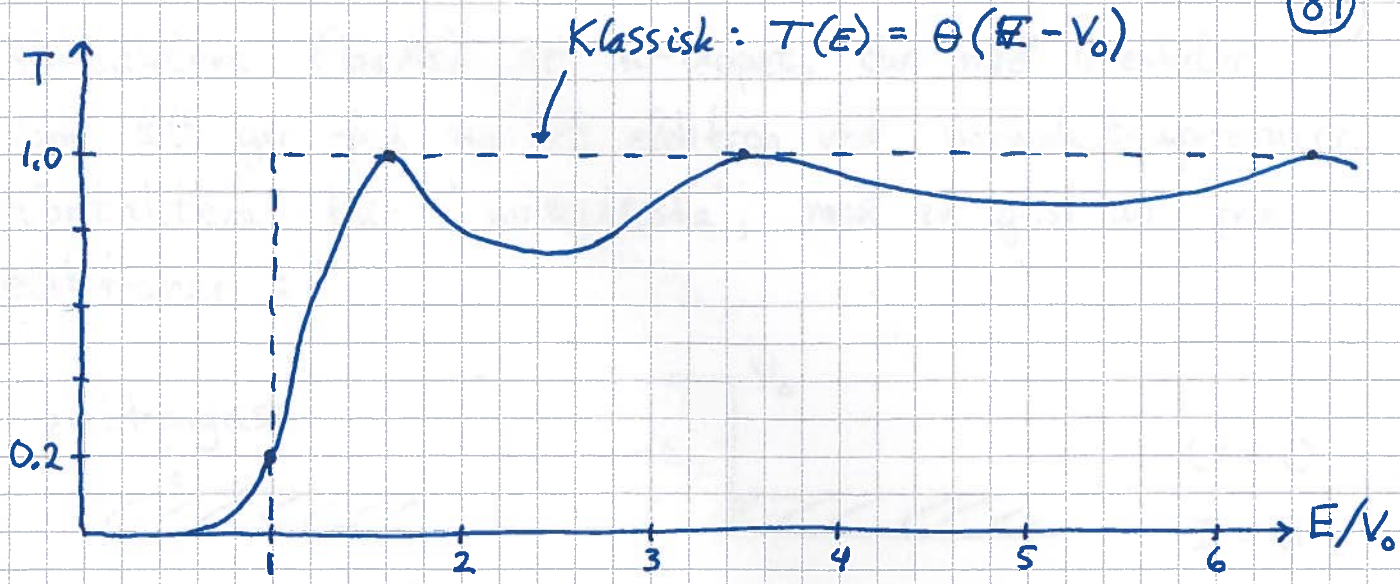
$E_1/V_0 = 1 + (\pi/4)^2 = 1.62$

$E_2/V_0 = 1 + (\pi/2)^2 = 3.47$

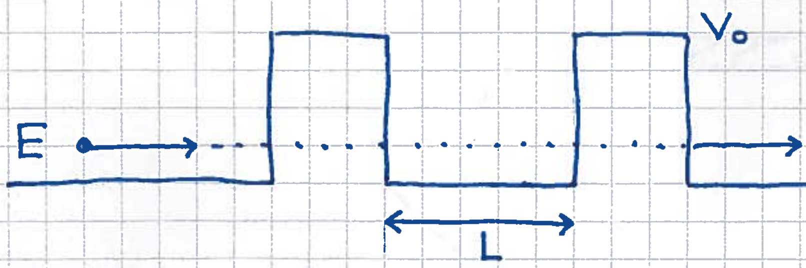
$E_3/V_0 = 1 + (3\pi/4)^2 = 6.55$ osv

"Halvklassisk" tolkning : Konstruktiv interferens mellom baner med veilengde forskjell $n \cdot 2L$:



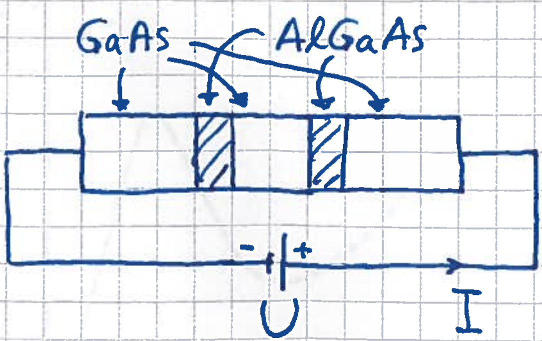


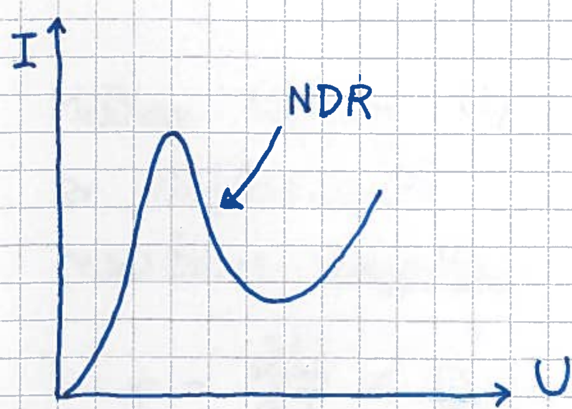
Resonant tunnelering og negativ differensiell resistans :



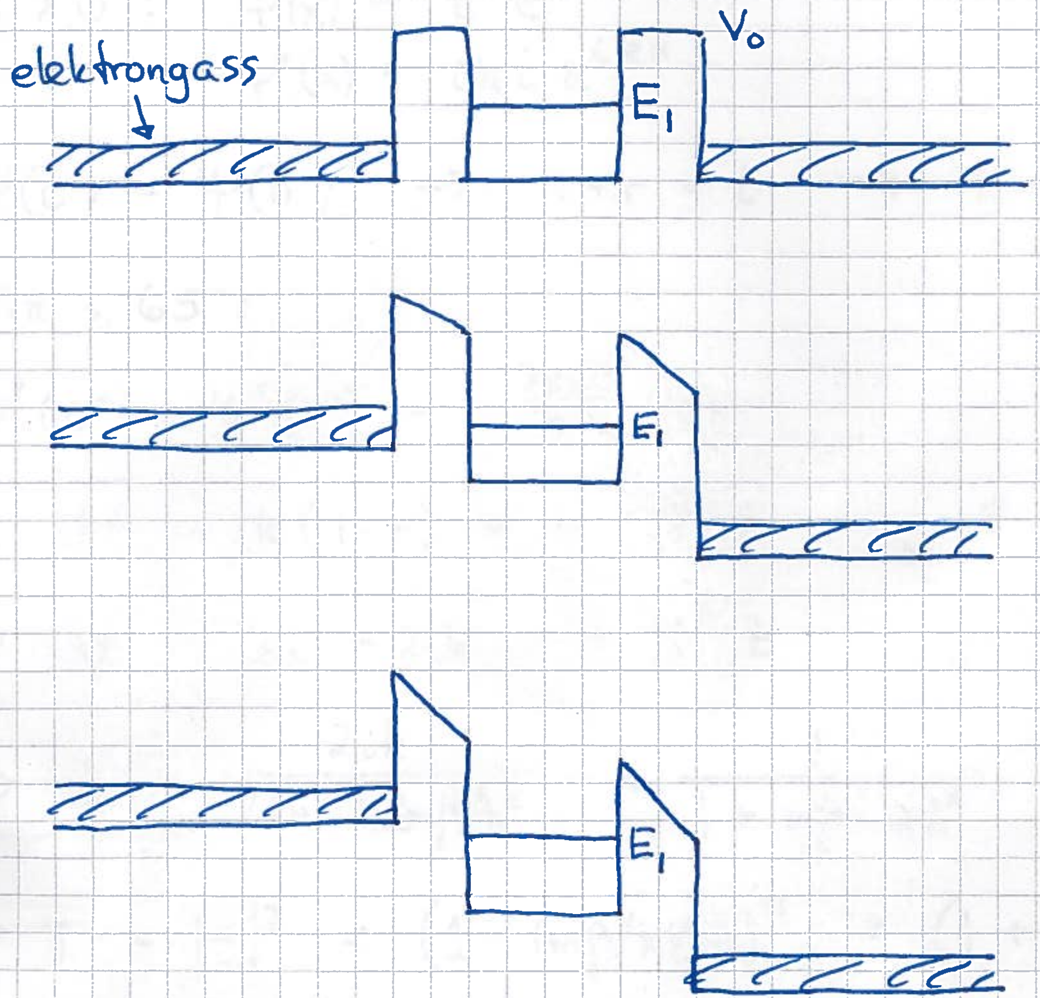
Resonans og konstruktiv interferens når brønnen mellom de to barrierene har bredde $L = n \cdot \lambda/2$

$$\Rightarrow T(E_n) = 1 \quad \text{når} \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\right)^2 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m^* L^2}$$





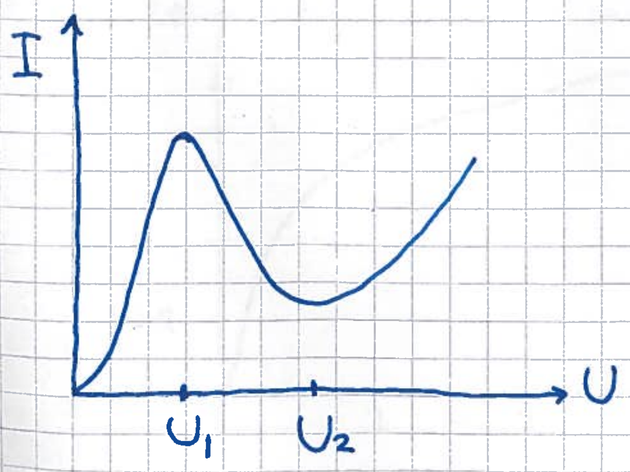
Kontaktene (GaAs) er n-dopet, dvs med urenheter som lett gir fra seg et elektron ved normale temperaturer. Kontaktene blir "metalliske", med en gass av frie elektroner:



$U = 0$
$I = 0$

U_1
stor I

U_2
mindre I



Mellom U_1 og U_2 er differensiell resistans negativ,

$$r = \frac{dU}{dI} < 0$$

Molto interessante !!

Eks 2 : Spredning mot $V(x) = -\beta\,\delta(x)$

$x < 0$: $\psi(x) = e^{ikx} + r\,e^{-ikx}$

$\psi'(x) = ik\left(e^{ikx} - r\,e^{-ikx}\right)$

$x > 0$: $\psi(x) = t\,e^{ikx}$

$\psi'(x) = ikt\,e^{ikx}$

$$\psi(0^+) = \psi(0^-) \Rightarrow 1 + r = t \Rightarrow r = t - 1$$

Fra s. 65 :

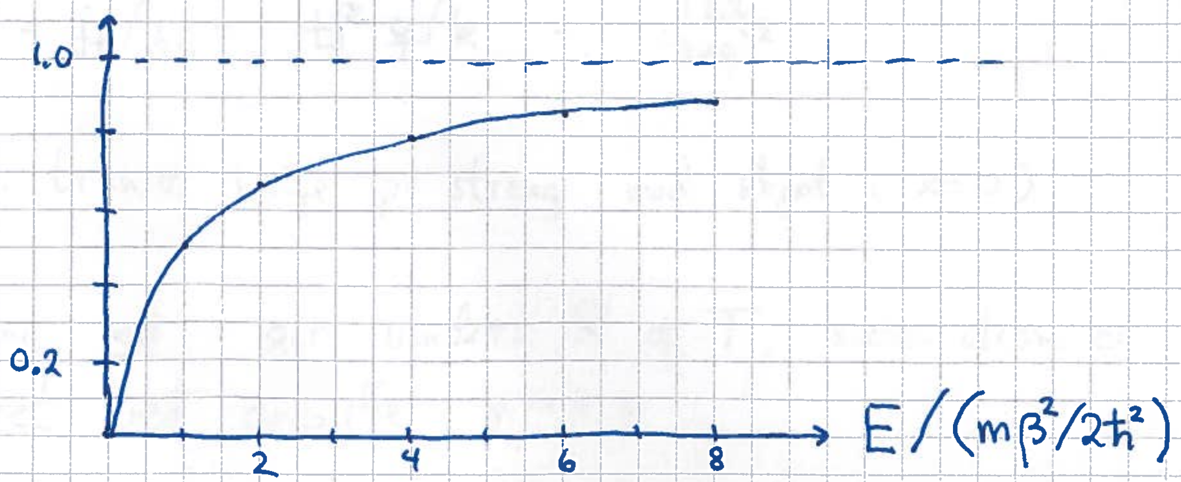
$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$\Rightarrow ikt - ik(1-r) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}t \quad ; \quad r - 1 = t - 2$$

$$\Rightarrow ikt + ikt - 2ik = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}t$$

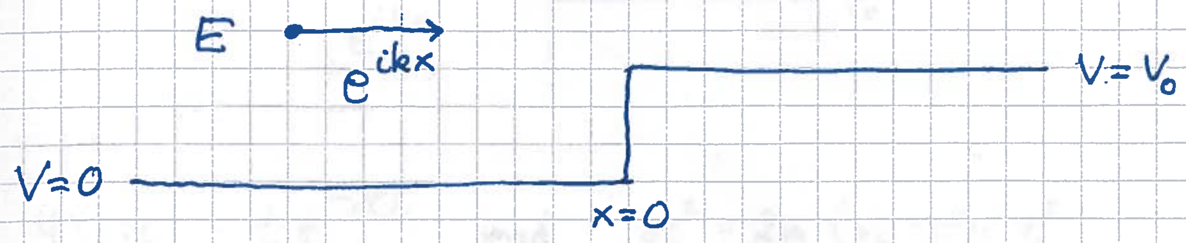
$$\Rightarrow t = \frac{2ik}{2ik + 2m\beta/\hbar^2} = \frac{1}{1 + m\beta/ik\hbar^2}$$

$$\Rightarrow T = |t|^2 = \left(1 + (m\beta/k\hbar^2)^2\right)^{-1} = \left(1 + m\beta^2/2E\hbar^2\right)^{-1}$$



Pussighet: Samme $T(E)$ for δ-brønn ($\beta > 0$) og δ-barriere ($\beta < 0$) !!

Eks 3: Potensialsprang



$$E > V_0: \quad \psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r\,e^{-ikx} & ; \quad x<0 \\ t\,e^{iqx} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

med $\quad k^2 = 2mE/\hbar^2 \;, \quad q^2 = 2m(E-V_0)/\hbar^2$

Kontinuerlig ψ og ψ' i $x=0$ gir

$$1+r = t \qquad \text{og} \qquad ik(1-r) = iqt$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{k-q}{k+q} \;, \qquad t = \frac{2k}{k+q}$$

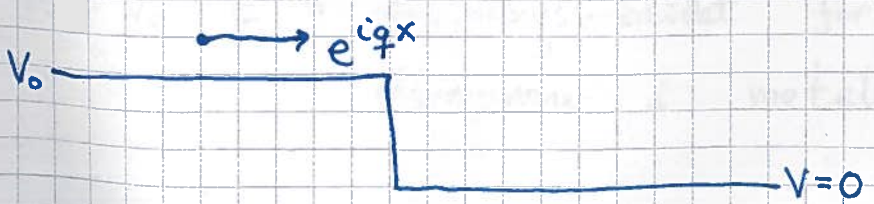
$$j_i = \hbar k/m \,, \quad j_r = -|r|^2\,\hbar k/m \,, \qquad j_t = |t|^2\,\hbar q/m$$

$$\Rightarrow \quad R = |j_r|/j_i = |r|^2 = \left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2 \;;$$

$$T = j_t/j_i = |t|^2\, q/k = \frac{4kq}{(k+q)^2}$$

(Jf. transv. bølge på streng med skjøt i $x=0$)

Sprang ned gir uendret R og T, siden disse er uendret ved ombytte $k \leftrightarrow q$:



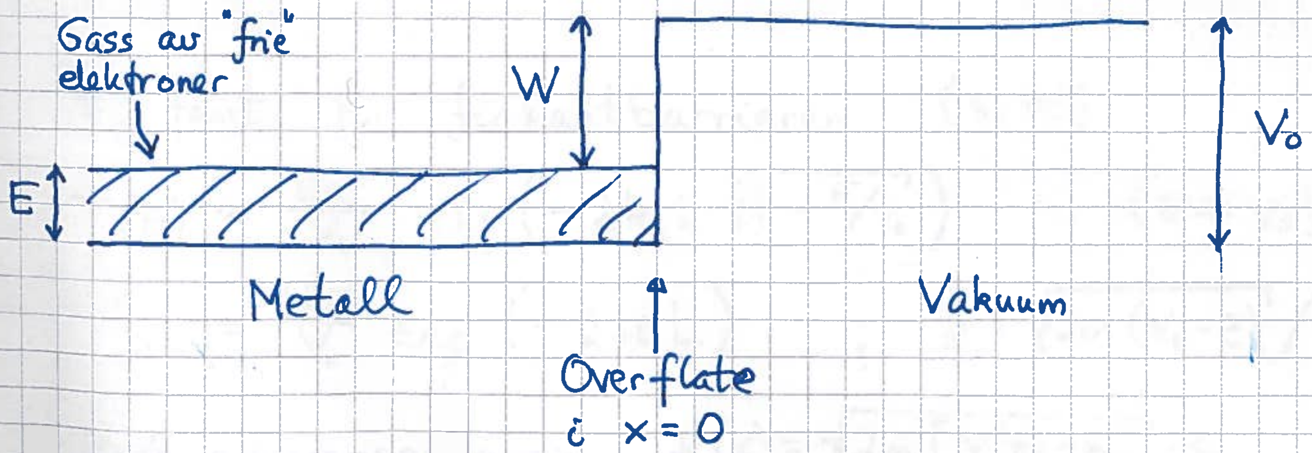
$E < V_0$ må gi $R = 1$ og $T = 0$:

$$\psi(x>0) = t\, e^{-\varkappa x} \quad \text{med} \quad \varkappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 + r = t, \quad ik(1-r) = -\varkappa t$$

$$\Rightarrow \quad R = |r|^2 = \left| \frac{\varkappa - ik}{\varkappa + ik} \right|^2 = 1 \quad ; \quad \text{OK}$$

Feltemisjon [PCH 3.6.4 ; IØ 3.6.g]



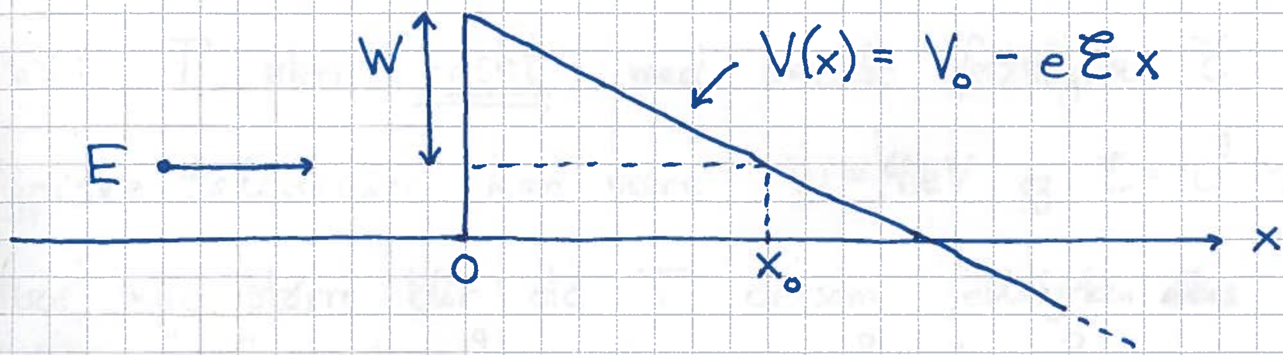
$W = V_0 - E$ = frigjøringsarbeidet for de mest energirike elektronene i metallet

Diverse måter å få elektroner ut av metallet på:

- Fotoner med $h\nu > W$ (fotoelektrisk effekt)
- Termisk eksitasjon, $k_B T \gtrsim W$
- Elektrisk felt kombinert med tunnelering

Anta elektrisk felt $\perp$ overflaten:

$$\vec{\mathcal{E}} = -\hat{x}\,\frac{dU}{dx} = \hat{x}\,\frac{1}{e}\,\frac{dV}{dx}$$



$$V(x_0) = E \Rightarrow V_0 - e\mathcal{E}x_0 = V_0 - W$$

$$\Rightarrow x_0 = W/e\mathcal{E}$$

Vi fant, for firkantbarrieren (s. 79):

$$T(E) \approx \frac{16E}{V_0}\exp\left(-2k_0 L\sqrt{1-E/V_0}\right) \qquad (E \ll V_0)$$

$$= \frac{16E}{V_0}\exp\left(-2\kappa L\right) \quad ; \quad \kappa = \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$$

Med posisjonsavhengig $\kappa(x) = \sqrt{2m[V(x)-E]}/\hbar$ kan vi med god tilnærmelse(*) erstatte $\exp(-2\kappa L)$ med

$$\exp\left[-2\int_0^{x_0}\kappa(x)\,dx\right]$$

(*) Mer om WKB-tilnærmelsen i TFY4205

Her er $\varkappa(x) = \sqrt{2m(V_0 - e\mathcal{E}x - E)}/\hbar$

$$= \sqrt{2m(W - e\mathcal{E}x)}/\hbar$$

slik at transmisjonssannsynligheten avhenger av feltet $\mathcal{E}$ slik:

$$T \sim \exp\left[-2\int_0^{W/e\mathcal{E}} \sqrt{2m(W-e\mathcal{E}x)}\,dx/\hbar\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{4\sqrt{2m}\,W^{3/2}}{3\hbar e\,\mathcal{E}}\right]$$

Dvs: T øker raskt med økende feltstyrke $\mathcal{E}$.

Typiske tallverdier kan være $W = 4\,eV$ og $\mathcal{E} = 10^9\,V/m$.

Hvor mye større blir da T dersom feltstyrken ~~dobles~~ dobles, fra $\frac{1}{2}\cdot 10^9\,V/m$ til $10^9\,V/m$?

Svar:

$$\frac{T(\mathcal{E})}{T(\mathcal{E}/2)} = \exp\left[\frac{4\sqrt{2m}\,W^{3/2}}{3\hbar e\,\mathcal{E}}\right]$$

som med $m = m_e = 9.1\cdot 10^{-31}\,kg$ er ca

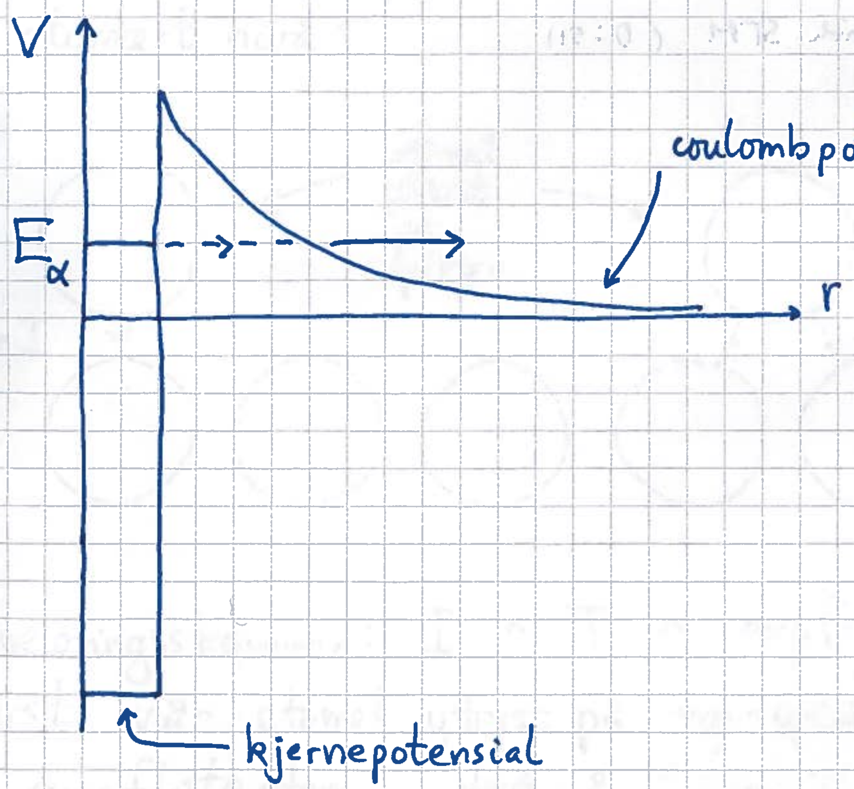
$\exp(55) \approx 10^{24}$

α - stråling [PCH 3.6.4; DJG 8.2 ; IØ 3.6.i]

Tunge atomkjerner er ustabile og kan spontant sende ut en α-partikkel, dvs en heliumkjerne ${}^4_2He^{2+}$.

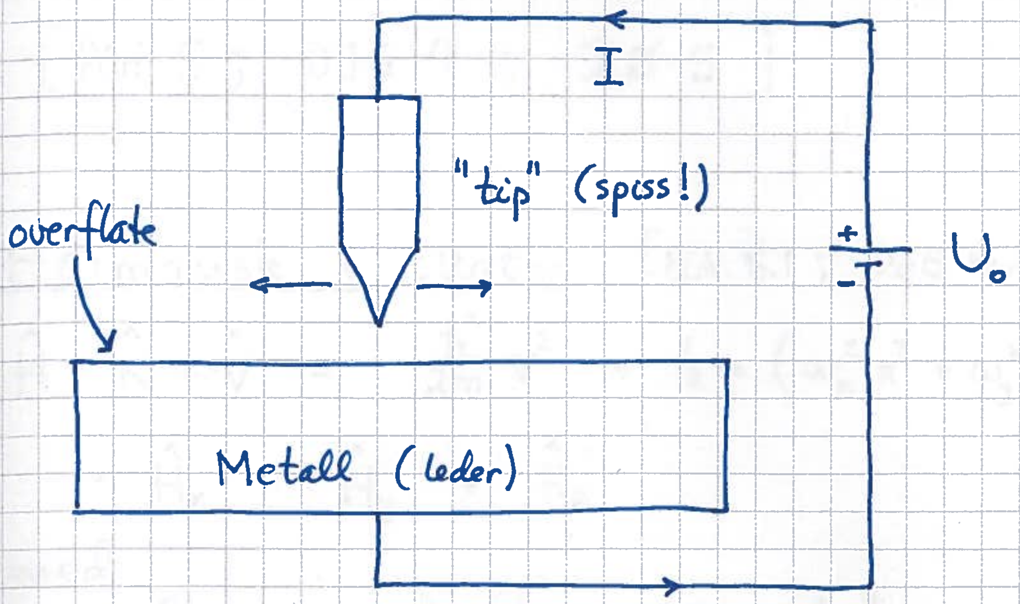
Eks: ${}^{212}_{84}Po \longrightarrow {}^{208}_{82}Pb + \alpha$; levetid ca $0{,}3\ \mu s$

George Gamow (1928) foreslo et modellpotensial som kombinerer en sterk tiltrekkende kjernekraft med kort rekkevidde og en svakere frastøtende coulombkraft med lang rekkevidde :

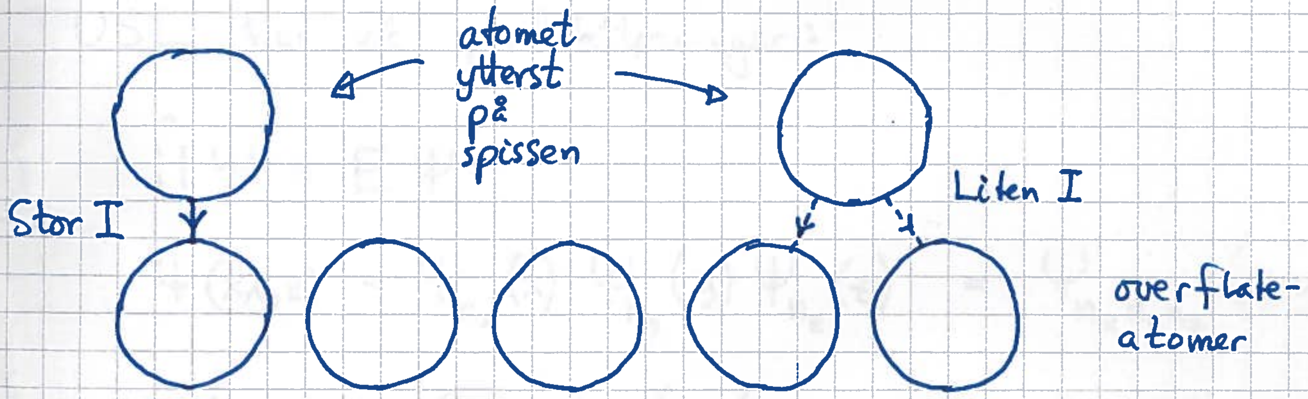


α-partikkelen befinner seg i en metastabil tilstand med energi E_α inni kjernen. Med $E_\alpha > 0$ $(V(r\to\infty) = 0)$ har α-partikkelen en viss sannsynlighet for å <u>tunnelere</u> ut av kjernen.

Tunnelerings mikroskop [PCH 3.6.4 ; IØ 3.6.h]



På atomært nivå:



Tunneleringsstrømmen: $I \sim T \sim \exp(-2\kappa L)$ er størst når atomet ytterst på tip-spissen er rett over et overflateatom. Ved å "scanne" tipen fram og tilbake nær overflaten og måle $I(x,y)$ oppnås en avbildning av overflaten på atomært nivå.

Binnig & Rohrer, NP 1986

STM: Scanning Tunneling Microscopy

Kvantemekanikk i to og tre dimensjoner

[PCH 5 ; DJG 4 ; IØ 5]

Harmonisk oscillator [PCH 5.1 ; DJG Problem 4.39 ; IØ 5.1]

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right)$$

$$= \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z$$

med

$$\hat{H}_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 ,$$ og tilsvarende for $\hat{H}_y$ og $\hat{H}_z$

TUSL har nå produktløsninger:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

$$\Psi(x,y,z) = \Psi_{n_x}(x)\,\Psi_{n_y}(y)\,\Psi_{n_z}(z) = \Psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z)$$

$$E = \frac{\hat{H}\Psi}{\Psi} = \underbrace{\frac{\hat{H}_x \Psi_{n_x} \cancel{\Psi_{n_y}}\,\cancel{\Psi_{n_z}}}{\Psi_{n_x}\cancel{\Psi_{n_y}}\,\cancel{\Psi_{n_z}}}}_{\text{kun avh. av } x} + \underbrace{\frac{\hat{H}_y \Psi_{n_y}}{\Psi_{n_y}}}_{\text{kun avh. av } y} + \underbrace{\frac{\hat{H}_z \Psi_{n_z}}{\Psi_{n_z}}}_{\text{kun avh. av } z}$$

Bare mulig dersom hvert ledd på høyre side er en konstant:

$$\frac{\hat{H}_x \Psi_{n_x}}{\Psi_{n_x}} = E_x \quad \Rightarrow \quad \hat{H}_x \Psi_{n_x} = E_x \Psi_{n_x} ,$$ som er TUSL

for en 1D harm. osc., og da vet vi at

$$E_x = (n_x + \tfrac{1}{2})\hbar\omega_x \quad \text{med} \quad n_x = 0, 1, 2, \ldots$$

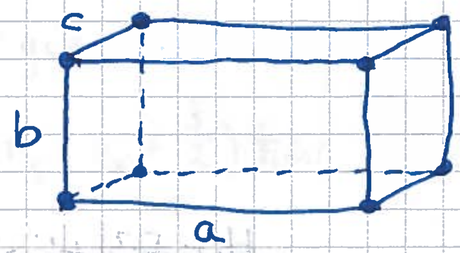
Og tilsvarende:

$$\hat{H}_y \Psi_{n_y} = E_y \Psi_{n_y} \quad ; \quad E_y = (n_y + \tfrac{1}{2})\hbar\omega_y \quad ; \quad n_y = 0, 1, 2, \ldots$$

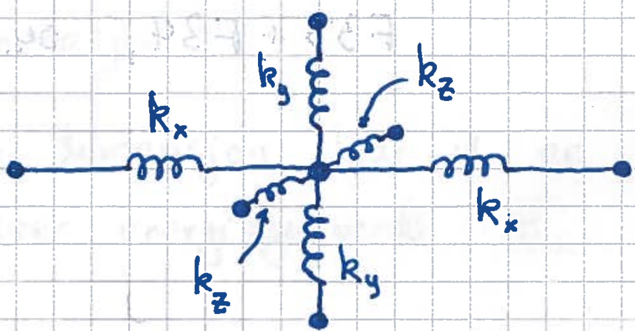
$$\hat{H}_z \Psi_{n_z} = E_z \Psi_{n_z} \quad ; \quad E_z = (n_z + \tfrac{1}{2})\hbar\omega_z \quad ; \quad n_z = 0, 1, 2, \ldots$$

Total energi : $E = E_x + E_y + E_z$

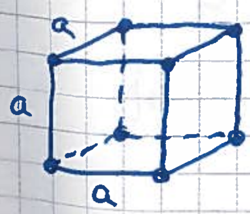
Eks: Vibrasjonsbevegelsen til atomene i en primitiv ortorombisk krystall.



$a \neq b \neq c$



Hvis $a = b = c$, blir krystallen primitiv kubisk, med $k_x = k_y = k_z = k$, dvs $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$:



Da har vi en 3D isotrop oscillator

Isotrop harmonisk oscillator:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = V(r)$$

dvs retningsuavhengig, kulesymmetrisk potensial, med en radielt rettet kraft

$$\vec{F} = -\nabla V = -\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} = -m\omega^2 r\,\hat{r},$$

en såkalt sentralkraft.

Mulige energier:

$$E_N = (n_x + n_y + n_z + \tfrac{3}{2})\hbar\omega = (N + \tfrac{3}{2})\hbar\omega$$

der $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \cdots$, dvs $N = 0, 1, 2, \cdots$

Degenerasjon:

I en dimensjon har vi en egenfunksjon $\psi_n(x)$ for hver energiegenverdi E_n.

I to eller flere dimensjoner, og med et symmetrisk potensial, oppstår degenerasjon, dvs to eller flere tilstander for en og samme energi.

Degenerasjonsgrad:

$$g_N = \text{antall tilstander med energi } E_N$$

For isotrop oscillator i 3D:

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega \; ; \quad \psi_{000} = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_0(z) \sim e^{-m\omega r^2/2\hbar}$$

$$\Rightarrow g_0 = 1$$

$$E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega \; ; \quad \psi_{100} = \psi_1(x)\psi_0(y)\psi_0(z) \sim x\, e^{-m\omega r^2/2\hbar}$$

$$\psi_{010} \sim y\, e^{-m\omega r^2/2\hbar}$$

$$\psi_{001} \sim z\, e^{-m\omega r^2/2\hbar}$$

$$\Rightarrow g_1 = 3$$

$$E_N = (N+\tfrac{3}{2})\hbar\omega \; ; \quad \psi_{N00}, \; \psi_{N-1,1,0}, \; \psi_{N-1,0,1}, \; \ldots\ldots$$

Kan ha $n_x = 0, 1, \ldots, N$. For gitt n_x kan vi ha $n_y = 0, \ldots, N-n_x$, dvs $N-n_x+1$ mulige n_y for gitt n_x. For gitt n_x og n_y er $n_z = N-n_x-n_y$, kun en mulighet.

Dermed:

$$g_N = \sum_{n_x=0}^{N} (N-n_x+1)$$

$$= (N+1) + N + (N-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

$$= \sum_{j=1}^{N+1} j = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

[Trolig kjent sum fra før. For odde N har vi $\frac{N+1}{2}\cdot(N+2)$ ved å kombinere $(N+1)+1$, $N+2$, $(N-1)+3, \ldots$ For like N har vi største leddet $(N+1)$, samt $\frac{N}{2}\cdot(N+1)$ ved å kombinere $N+1$, $(N-1)+2, \ldots\ldots$, dvs $(1+N/2)\cdot(N+1) = \frac{1}{2}(2+N)(N+1)$.]

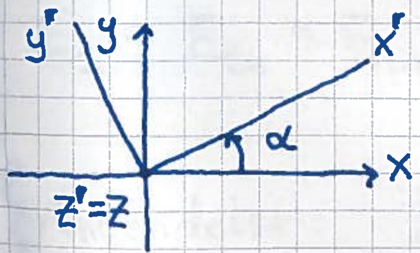
Bytte av basis:

Med isotropt potensial $V(r)$ er ingen retninger unike / spesielle / foretrukne. En partikkel som er i et degenerert energinivå, kan da beskrives av en av de beregnede egentilstandene, eller en vilkårlig (normert) lineærkombinasjon av disse.

Eks: Isotrop harm. osc., partikkel med energi $E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega$.

Med valgt koordinatsystem (x,y,z) er (normerte) egentilstander i utgangspunktet (s. 93) $\psi_{100} \equiv (100)$, $\psi_{010} \equiv (010)$, $\psi_{001} \equiv (001)$.
Da er også $c_1(100) + c_2(010) + c_3(001)$ en egentilstand med energi E_1, og normert dersom $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$.

Et konkret eksempel tilsvarer rotasjon av koord.systemet om z-aksen



TUSL med (x,y,z) gir
$(100) \sim x \exp(-m\omega r^2/2\hbar)$ osv
TUSL med (x', y', z') gir
$(100)' \sim x' \exp(-m\omega r^2/2\hbar)$ osv

$\Rightarrow$ Sammenhengen mellom ψ' og ψ må bli den samme som mellom (x', y', z') og (x,y,z). Fra figuren: $z' = z$,
$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$.
På matrise- og vektorform:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} (100)' \\ (010)' \\ (001)' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} (100) \\ (010) \\ (001) \end{pmatrix} \; ; \; A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dvs, som "skifte av basis" fra lineær algebra.