Plancks strålingslov

EM stråling med frekvens ν har kuantisert energi:

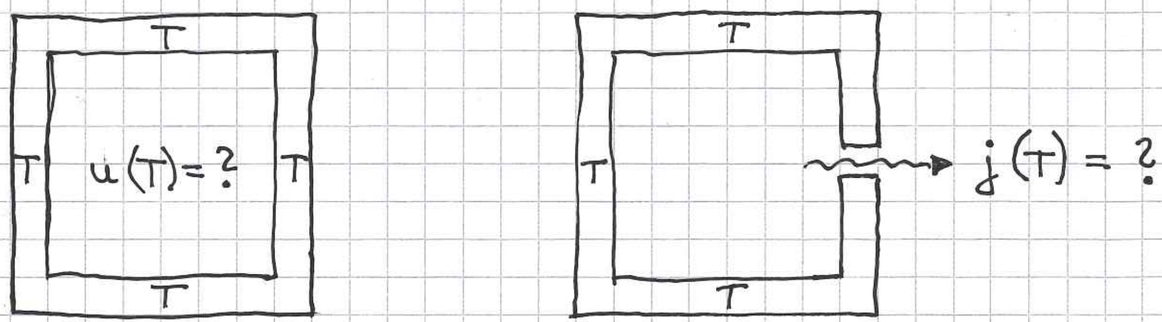
$$\boxed{\begin{aligned} E_n &= n \cdot h\nu \\ n &= 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}}$$

Plancks kvantehypotese (1900, NP 1918)

Gav samsvar med eksperimenter med $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js

[Fra 20.05.19: $h \equiv 6.62607015 \cdot 10^{-34}$ Js]

Vi ser på metallboks med hulrom i termisk likevekt:



$u(T)$ = strålingsenergi pr volumenhet i hulrommet

$j(T)$ = utstrålt effekt pr flateenhet gjennom liten åpning i veggen

Hulromsenergiens frekvensfordeling:

$$u(T) = \int du = \int_0^\infty d\nu \, \frac{du}{d\nu}$$

med

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{1}{V} \frac{dU}{d\nu} = \frac{1}{V} \frac{\langle E \rangle \, dN}{d\nu}$$

Her er:

$V = L^3$ = hulrommets volum

$\langle E \rangle$ = midlere energi pr svingemode ("tilstand")

dN = antall svingemoder mellom ν og $\nu + d\nu$

$\frac{dN}{d\nu}$ = tilstandstettheten, dvs antall tilstander pr frekvensenhet

Gauss' lov $\Rightarrow$ $\vec{E} = 0$ inni metallveggene

Faraday's lov $\Rightarrow$ $E_\parallel$ kontinuerlig i grenseflatene mellom metall og hulrom

$\Rightarrow$ $E_\parallel = 0$ på metallveggene i $x, y, z = 0$ og L

Oppnås med stående bølgekomponenter på formen

$$E_x \sim \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z)$$
$$E_y \sim \sin(k_x x) \cdot \sin(k_z z)$$
$$E_z \sim \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y)$$

med bølgetallskomponenter $k_x = \frac{n_x \pi}{L}$, $k_y = \frac{n_y \pi}{L}$,

$k_z = \frac{n_z \pi}{L}$; $n_j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ $(j = x, y, z)$

dvs

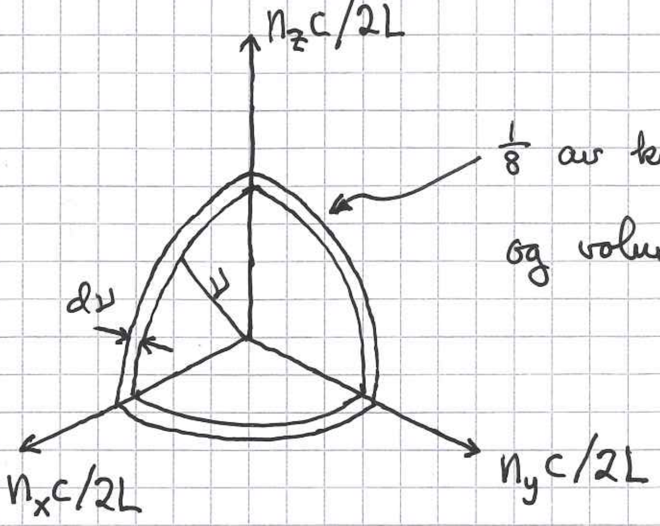
$$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$$\lambda = 2\pi / k = 2L / \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$$\nu = c/\lambda = ck/2\pi = \frac{c}{2L} \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

der inntil <u>en</u> $n_j = 0$ (i motsatt fall er $\vec{E} = 0$ overalt)

Mulige frekvensverdier $\nu = \frac{c}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ tilsvarer punkter i positiv oktant av rommet som utspennes av aksene $n_x c/2L$, $n_y c/2L$, $n_z c/2L$:



$\frac{1}{8}$ av kuleskall med radius ν, tykkelse $d\nu$, og volum $dV_\nu = \frac{1}{8} \cdot 4\pi\nu^2 \cdot d\nu = \frac{\pi}{2}\nu^2 d\nu$

Hver frekvens okkuperer volum $(c/2L)^3$. Pga 2 uavhengige polarisasjonsretninger for $\vec{E}$-feltet har vi 2 tilstander pr frekvensverdi. Dermed:

$$\frac{dN}{dV_\nu} = \frac{2}{(c/2L)^3} = \frac{16V}{c^3},$$ som med $dV_\nu = \frac{\pi}{2}\nu^2 d\nu$

gir tilstandstettheten

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{16V}{c^3} \cdot \frac{\pi}{2}\nu^2 = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

Frekvensfordelingen blir da:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{\langle E\rangle}{V}\frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \langle E\rangle$$

Det gjenstår å finne midlere energi pr svingemode, $\langle E\rangle$.

Med klassisk teori : $u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$,
dvs 2 kvadratiske bidrag til strålingsenergien, som bidrar med $k_B T/2$ hver til $\langle E \rangle$, i følge det klassiske ekvipartisjonsprinsippet (se TFY4165 eller TFY4115).

$$\Rightarrow \frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B T \qquad \text{(Rayleigh-Jeans lov)}$$

Gir UV-katastrofen : $u(T) = \int_0^\infty d\nu \, \frac{du}{d\nu} = \infty$

Med Plancks kvantehypotese og statistisk mekanikk :

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot p_n$$

$$E_n = nh\nu \; ; \quad p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \; ; \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{partisjonsfunksjonen} \quad \text{(tilstandssummen)}$$

som sørger for normering av sannsynlighet,

$$\sum_n p_n = 1$$

Dermed:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z}\left(-\frac{d}{d\beta}\right) \sum_n e^{-\beta E_n} = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\beta}$$

Innfør $x = \exp(-h\nu\beta)$:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{d\beta} = \frac{dZ}{dx}\frac{dx}{d\beta} = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-h\nu) \cdot x$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = -(1-x) \cdot (-h\nu x)/(1-x)^2 = \frac{h\nu x}{1-x} = \frac{h\nu}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{h\nu}{e^{h\nu\beta} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi h \nu^3/c^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad ; \quad \text{Plancks strålingslov}$$

Total energi pr volumenhet: $\quad u(T) = \int_0^\infty d\nu \, \frac{du}{d\nu}$

Substituerer $\quad y = h\nu/k_B T$

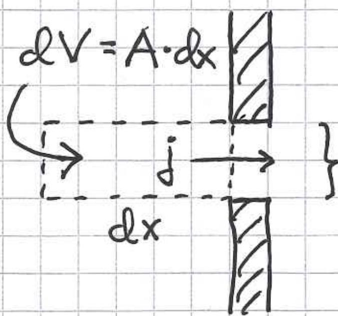
$$\Rightarrow \nu = (k_B T/h)\, y \quad \text{og} \quad d\nu = (k_B T/h)\, dy$$

$$\Rightarrow u(T) = \int_0^\infty \frac{k_B T}{h} dy \cdot \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \cdot \frac{y^3}{e^y - 1}$$

Fra Rottmann e.l: $\quad \int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy = \pi^4/15$

$$\Rightarrow u(T) = \alpha T^4 \quad \text{med} \quad \alpha = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3}$$

Med et lite hull i den ene veggen:

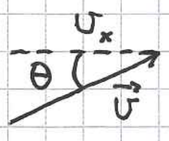


$$j = \frac{1}{2} \left\langle \frac{dU}{A \cdot dt} \right\rangle$$

halvparten av fotonene på vei mot <u>høyre</u>

$$dU = u \cdot dV = u \cdot A \cdot dx$$

$$\Rightarrow j = \frac{1}{2} u \left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} u \langle v_x \rangle$$



$$|\vec{v}| = c \quad ; \quad v_x = c \cdot \cos\theta \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\langle v_x \rangle = \frac{\iint v_x \, d\Omega}{\iint d\Omega} = c \cdot \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta \cos\theta}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta} = \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow j(T) = \frac{c}{4} u(T) = \sigma T^4 \quad \text{med} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \, \frac{W}{m^2 K^4}$$

(Stefan – Boltzmanns lov)

Strålingsintensitetens frekvensfordeling: $j(T) = \int_0^\infty d\nu \, \frac{dj}{d\nu}$

$$\frac{dj}{d\nu} = \frac{c}{4}\frac{du}{d\nu} = \frac{2\pi h \nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

Bølgelengdefordelingen: $j(T) = \int_0^\infty d\lambda \, \frac{dj}{d\lambda}$

(Se Test 1: $\nu = c/\lambda$; $d\nu = -(c/\lambda^2)\,d\lambda$)

Gir max. $dj/d\lambda$ for $\lambda \cdot T = 2898\ \mu m \cdot K$

(Wiens forskyvningslov)