Postulatene [PCH 2.1 ; DJG 3.3 ; IØ 2.2]

Empirisk grunnlag for klassisk mekanikk : Newtons lover

Kvantemekanikk baserer seg på følgende <u>postulater</u> :

A. Operatorpostulat

Målbare størrelser i klassisk mekanikk,

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_N, p_1, p_2, \ldots, p_N)$$

representeres i QM av lineære operatorer

$$\hat{F}(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \ldots, \hat{q}_N, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_N)$$

der

$$\hat{q}_j = q_j = \text{operator for posisjonskoordinat } q_j$$

$$\hat{p}_j = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_j} = \text{—''— impulskoordinat } p_j$$

Rekkefølgen på $\hat{q}_j$ og $\hat{p}_j$ slik at egenverdiene til $\hat{F}$ blir reelle.

Merk at det finnes fysiske størrelser som ikke "eksisterer" i klassisk mekanikk, f.eks. <u>spinn</u>.

Eks: Partikkel i xy-planet, masse m

$N = 2; \quad \hat{q}_1 = q_1 = x, \quad \hat{q}_2 = q_2 = y$

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_2 = \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\hat{K} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$\hat{L}_z = (\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}})_z = \hat{x}\hat{p}_y - y\hat{p}_x$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

B. Tilstandspostulat

Bølgefunksjonen $\Psi(q_1, q_2, \cdots, q_N, t)$ beskriver systemets tilstand fullstendig. Ψ er bestemt av SL

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$$

der $\hat{H} = \hat{K} + V$ er systemets Hamiltonoperator.

C. Forventningsverdipostulat

Mange målinger av en størrelse F på systemer som alle er preparert i samme tilstand Ψ vil gi en middelverdi

$$\langle F \rangle = \int \Psi^* \hat{F} \Psi \, d\tau$$

Her er $d\tau = dq_1 \, dq_2 \cdots dq_N$ og $\int |\Psi|^2 d\tau = 1$.

$\langle F \rangle$ kalles <u>forventningsverdien</u> til F.

Eks: For partikkel i boks, i en gitt stasjonær tilstand $\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) \cdot \exp(-iE_n t/\hbar)$ er

$$\langle x \rangle = \int_0^L \Psi_n^*(x,t)\, x\, \Psi_n(x,t)\, dx = \int_0^L x\, |\Psi_n(x,t)|^2 dx$$

$$= \int_0^L x\, |\psi_n(x)|^2 dx = \underline{\frac{L}{2}}$$

$$\langle p \rangle = \int_0^L \Psi_n^*(x,t)\, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_n(x,t)\, dx$$

$$\sim \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} \cdot \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \underline{0}$$

D. Målepostulat

De eneste mulige måleverdier av F er egenverdiene f_j, gitt ved

$$\hat{F}\, \Psi_j = f_j\, \Psi_j$$

der Ψ_j er egenfunksjoner til $\hat{F}$.

Hvis F måles, og resultatet er f_j, havner systemet i egentilstanden Ψ_j. Med andre ord, målingen påvirker systemet.

Eks: Anta partikkel preparert i tilst. $\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{3} c_n \psi_n(x)$ ved $t=0$. En måling av partikkelens energi ved $t>0$ vil da gi enten E_1, E_2 eller E_3, med sanns. hhv. $|c_1|^2$, $|c_2|^2$ og $|c_3|^2$. Hvis f.eks. E_2 ble målt ved t_1, beskrives partikkelen av

$\Psi_2(x,t) = \psi_2(x) \exp(-iE_2 t/\hbar)$ ved $t_2 \geq t_1$.