# Fotoelektrisk effekt

Einstein (1905, NP 1921):

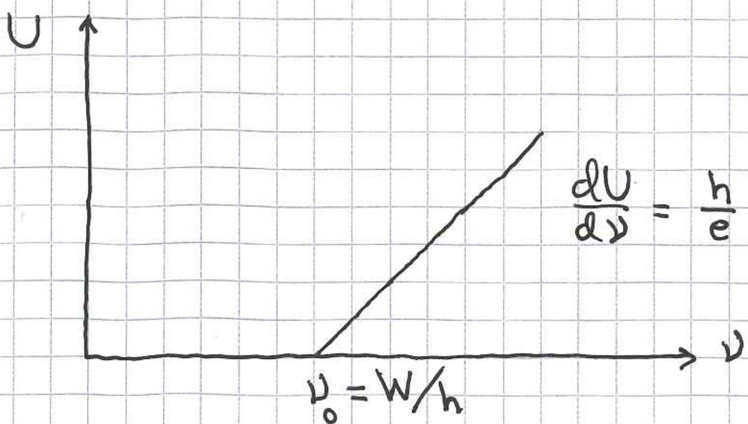
[Ann. Physik **17**, 132 (1905) ; Am. J. Phys. **33**, 367 (1965) ]

Energien i EM stråling er kvantisert i enheter av $h\nu$, med h-verdi som innført av Planck. Elektroner i metallet (på/nær overflaten) absorberer <u>hele</u> energimengden $h\nu$.

[ Liten sannsynlighet for at et gitt elektron absorberer mer enn ~~et~~ energikvant, men to-, tre- og multi-foton fotoelektrisk effekt er både observert og beskrevet teoretisk. ]

I tråd med eksperimentene:

- Må ha $h\nu > W$ for å løsrive elektroner;
  $W$ = metallets frigjøringsarbeid ("work function"), mellom 2 eV og 6 eV for de fleste metaller
- Løsrevne elektroners max. kin. energi: $K = h\nu - W$
- Terskelfrekvens: $\nu_0 = W/h$
- Terskelspenning $U = K/e$ for å hindre strøm i kretsen, dvs $U = (h\nu - W)/e = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)$




$$\frac{dU}{d\nu} = \frac{h}{e} \approx 4.14 \cdot 10^{-15} \ \text{V/Hz}$$

# Comptoneffekt [IØ1]

A. H. Compton [Phys Rev 21, 483 (1923) ; NP 1927] tolket sine egne exp. som kollisjon mellom to partikler, et (røntgen-) foton og et elektron (essensielt) i ro :

FØR:

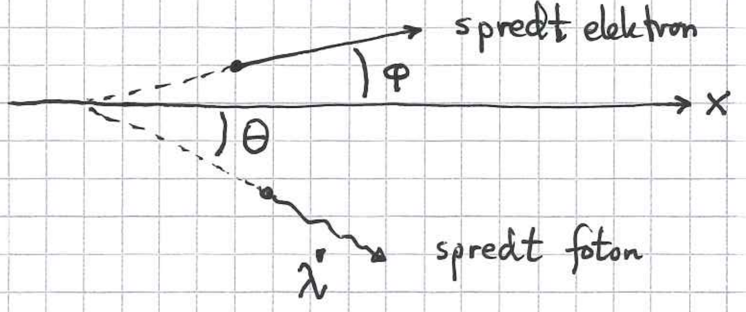

$\lambda = c/\nu$

$E = h\nu$

$p = E/c = h/\lambda$

$E_e = m_e c^2$

ETTER:




Energi- og impulsbevarelse gir

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c \cdot (1 - \cos\theta) \; ; \; \lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 0.024 \text{Å}$$

= elektronets compton-bølgelengde

Relativistisk mekanikk (det mest essensielle):

Impuls : $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ ; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

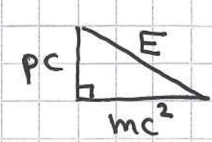
Energi : $E = \gamma mc^2 = E_0 + K$

Hvileenergi : $E_0 = mc^2$

Kinetisk energi : $K = E - E_0 = (\gamma - 1) mc^2$ ; hvis $v \ll c$, er $\gamma \approx 1 + v^2/2c^2$ slik at $K \approx \frac{1}{2} mv^2$

Partikkel med masse $m$, impuls $p$ og energi $E$ :

$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ ; "Pythagoras" :




Foton: $m = 0 \Rightarrow E = pc$, som med $E = h\nu$ gir $p = h/\lambda$

# Bohr-modellen (N. Bohr 1913, NP 1922)

Utgangspunkt: Balmer-serien for H-atomet, $\lambda_n = Bn^2/(n^2-4)$ dvs $1/\lambda_n = R\,(1/2^2 - 1/n^2)$ med $R = 4/B \approx 10^7\ m^{-1}$ og $n = 3,4,5,6$ ; Rutherfords exp. med spredning av $\alpha$-partikler ($He^{2+}$) mot tynn gullfolie, som viste at atomets positive ladning (og masse) er samlet i liten kjerne (1911); Plancks kvantehypotese og Einsteins beskrivelse av fotoelektrisk effekt, som viste at strålingsenergien er kvantisert i enheter $h\nu$.

Bohrs postulater:

- H-atomets elektron er i en stasjonær tilstand med bestemt energi. Elektronet er i akselerert bevegelse og skulle i følge Maxwells ligninger sende ut EM bølger og stadig miste energi. Må på et vis være forhindret.

- Elektronet kan endre tilstand – foreta et kvantesprang – ved å absorbere eller emittere et foton med noen bestemte energier.

  Da antyder Balmer-serien at de stasjonære tilstandene har energi

  $$E_n = -hcR/n^2$$

  når vi ser for oss emisjon av et foton med energi

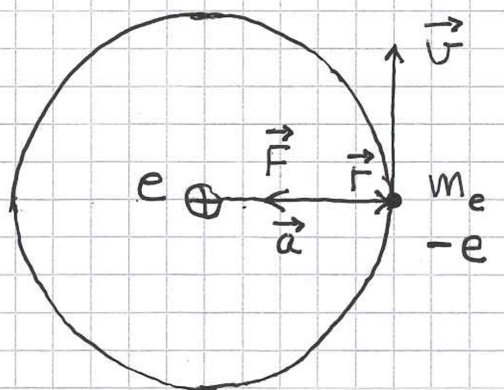
  $$h\nu = hc/\lambda = hcR\,(1/j^2 - 1/n^2) = E_n - E_j$$

  ved overgang fra en tilstand $n = 3,4,5$ eller $6$ til en tilstand $j = 2$ (med lavere energi). Lyman-serien (1906–1914; UV-stråling; fra $n = 2,3,4,\ldots$ til $j = 1$) antyder at en tilstand $n = 1$ med energi $E_1 = -hcR \approx -13.6$ eV også må inkluderes, og at $E_1$ er H-atomets laveste energitilstand (det vi kaller systemets grunntilstand).

- Elektronet beveger seg i klassiske baner rundt atomkjernen, som en planet rundt en stjerne. Generelt elliptiske baner; enklest å anta sirkelbane.

- Dersom modellen (teorien) er korrekt så langt [noe den ikke er: antagelsen om klassiske baner stemmer ikke], da må elektronets dreieimpuls være kvantisert, med mulige verdier $L = |\vec{L}| = n\hbar$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Her er $\hbar = h/2\pi \approx 1.05 \cdot 10^{-34}$ Js, den såkalte reduserte Plancks konstant.
(Det stemmer at $L$ er kvantisert, men ikke med disse verdiene.)

La oss vise at Newtons 2. lov og Coulombs lov samt antagelsen om kvantisert dreieimpuls gir de "riktige" energiverdiene $E_n = -13.6\text{ eV}/n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, i tråd med Balmers formel (og Lyman-serien).




$$F = m_e a$$

med

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{og} \quad a = \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v^2 = a \cdot r = \frac{F \cdot r}{m_e} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

[der vi antar $v \ll c$]

som med pot. energi $V = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r$ gir total energi

$$E = K + V = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = r m_e v = n\hbar$$

$$\Rightarrow L^2 = r^2 m_e^2 \underbrace{\left( e^2 / 4\pi\varepsilon_0 m_e r \right)}_{= v^2} = n^2 \hbar^2$$

$$\Rightarrow r_n = n^2 \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \equiv n^2 \cdot a_0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Bohr-radien : $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529$ Å

Mulige ("tillatte") energiverdier :

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 \cdot n^2} \approx -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

Ikke-relativistiske hastigheter var en bra antagelse :

$$K_{max} = K_1 = -E_1 = 13.6 \text{ eV} \ll m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV}$$

Kan skrive energiene på formen $E_n = -\frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 / n^2$

der finstrukturkonstanten er $\alpha = e^2 / 4\pi\varepsilon_0 \hbar c \approx 1/137$

Bohrs atommodell gav riktige energinivåer for H-atomet, men fungerte dårlig for andre atomer.

Det stemmer at $L$ er kvantisert, og av størrelsesorden $\hbar$, men vi skal senere se at f.eks. $L = 0$ i H-atomets grunntilstand.

Ideene om stasjonære tilstander og kvantesprang stemmer, men de klassiske elektronbanene måtte forkastes.

# Partikkelbølger

Louis de Broglie (1923, NP 1929):

Siden lys har både bølge- og partikkelegenskaper, må det samme være tilfelle også for massive partikler.

For lys (EM stråling): $E = pc$ og $E = h\nu$ (fotoner)

Dermed: $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda$

For massive partikler med impuls $p$ og energi $E$:

$$\boxed{\lambda = h/p \quad ; \quad \nu = E/h}$$ de Broglies hypotese

Massive partiklers termiske de Broglie bølgelengde:

For ikke-relativistisk ideell gass av partikler med masse $m$:

$$\langle K_{trans} \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{3}{2} k_B T$$ = midlere translasjonsenergi pr partikkel

Dermed:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\langle p^2 \rangle}} = \frac{h}{\sqrt{3 m k_B T}}$$ = partiklenes termiske de Broglie bølgelengde

## Schrödingerligningen [PCH 1-3 ; DJG 1-2 ; IØ 1-3] 

(Erwin Schrödinger, 1925, NP 1933 med Paul Dirac)

Hva slags bølgeligning kan "fungere" for de Broglies partikkelbølger?

I klassisk fysikk beskriver bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \left[ 3D : \nabla^2 y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right]$$

både mekaniske og EM bølger, med $y$ = utsving på streng, (komponenter av) elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetfelt $\vec{B}$, osv.

Generell løsning er

$$y(x,t) = y(x \pm vt)$$

Viktig eksempel er harmonisk løsning

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

med amplitude $A$, bølgetall $k = 2\pi/\lambda$ ($\lambda$ = bølgelengde), vinkelfrekvens $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ ($T$ = periode, $\nu$ = frekvens), fasehastighet $v = \lambda/T = \lambda\nu = \omega/k$ og gruppehastighet $v_g = d\omega/dk$

---

Anta fri partikkel, masse $m$, i konstant potensial $V = 0$ [$V$ = potensial = potensiell energi] :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad ; \quad E = K = \tfrac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$$

I følge de Broglie :

$\lambda = h/p \Rightarrow k = 2\pi/\lambda = 2\pi p/h = p/\hbar$

$\nu = E/h \Rightarrow \omega = 2\pi\nu = 2\pi E/h = E/\hbar$

⇒ Naturlig å prøve reell harmonisk bølgefunksjon

$$\Phi(x,t) = \cos(kx - \omega t) = \cos\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right)$$

og klassisk bølgeligning

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

men innsetting gir da $(E^2 - v^2p^2)\Phi = 0$, som med $v = p/m$ og $E = K$ gir $K = p^2/m$, mens vi skal ha $K = p^2/2m$.

Vi ser imidlertid at $\partial\Phi/\partial t$ og $\partial^2\Phi/\partial x^2$ vil gi hhv $E \cdot \Phi$ og $p^2 \cdot \Phi$. Problemet med at $\frac{\partial}{\partial t}\cos(\ldots)$ gir $\sin(\ldots)$ mens $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(\ldots)$ gir $\cos(\ldots)$ omgår vi ved å benytte at

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Nærmere bestemt; vi prøver bølgefunksjonen

$$\Psi(x,t) = \cos\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right) + i\sin\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right) = e^{i(px - Et)/\hbar}$$

Da er

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\Psi, \quad \text{dvs} \quad \underline{i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi}$$

og

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^2 \Psi = -\frac{p^2}{\hbar^2}\Psi, \quad \text{dvs} \quad \underline{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m}\Psi}$$

så vi satser på bølgeligningen

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}}$$

Schrödingerligningen (SL) for fri partikkel i 1D

Dette er den enkleste ligningen som fungerer for en fri partikkel. ( $V = V_0 = \text{konst.} \neq 0$ er en triviell "komplikasjon".) Ligningen viser seg å fungere også for $V \neq$ konst.

Merk at løsningene må være komplekse! (Reell $\Psi$ gir reell $(-\hbar^2/2m)\,\partial^2\Psi/\partial x^2$ og imaginær $i\hbar\,\partial\Psi/\partial t$; det er ikke mulig!

Målbare fysiske størrelser er reelle.

Da kan bølgefunksjonen $\Psi$ ikke være direkte målbar!

## Tolkning av bølgefunksjonen

Max Born (1926, NP 1954):

$dP = |\Psi(x,t)|^2\,dx$ = sannsynligheten for at en måling av partikkelens posisjon ved tid $t$ ligger mellom $x$ og $x + dx$

Dermed:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{dP}{dx} = \text{sannsynlighetstettheten}$$

Normering: $\int dP = 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2\,dx = 1}$$