Minimalt uskarphetsprodukt $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$

Må tilsvare $\tilde{A}\Psi + i\alpha\tilde{B}\Psi = 0$, og dermed

$$\alpha = -i\langle[x,\hat{p}]\rangle/2(\Delta p)^2 = \hbar/2(\Delta p)^2 = \Delta x/\Delta p$$

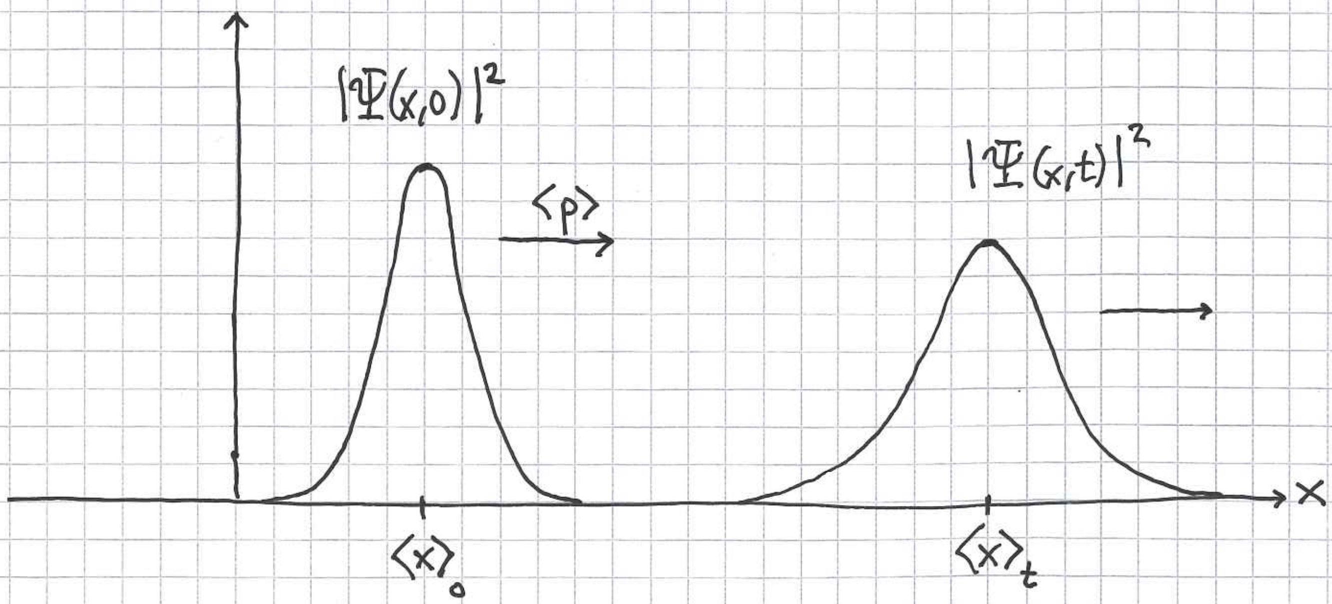
$$\Rightarrow \underbrace{(x-\langle x\rangle)}_{\tilde{A}}\Psi + i\frac{\Delta x}{\Delta p}\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} - \langle p\rangle\right)}_{\tilde{B}}\Psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\Psi}{dx} = \frac{-\Delta p}{\hbar\,\Delta x}(x-\langle x\rangle)\Psi + \frac{i\langle p\rangle}{\hbar}\Psi$$

$$= -\frac{x-\langle x\rangle}{2(\Delta x)^2}\Psi + \frac{i\langle p\rangle}{\hbar}\Psi$$

$$\Rightarrow \Psi(x) = C\cdot\exp\left\{-\left(\frac{x-\langle x\rangle}{2\Delta x}\right)^2 + \frac{i\langle p\rangle}{\hbar}x\right\}$$

som er en <u>gaussisk bølgepakke</u> med tyngdepunkt i $x = \langle x\rangle$ og med romlig bredde Δx, og som forplanter seg med midlere impuls $\langle p\rangle$ i positiv x-retning:



Forventningsverdienes tidsutvikling

[PCH 4.3 ; DJG 3.4.3 ; IØ 4.3]

I dette kurset er operatorene $\hat{F}$ ikke eksplisitt tidsavhengige.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle F\rangle = \frac{d}{dt}\left\{ \int \Psi^* \hat{F} \Psi \, dx \right.$$

$$= \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \hat{F} \Psi \, dx + \int \Psi^* \hat{F} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx$$

$$= \int \left(\frac{\hat{H}\Psi}{i\hbar}\right)^* \hat{F} \Psi \, dx + \int \Psi^* \hat{F} \frac{\hat{H}\Psi}{i\hbar} dx$$

$$\overset{(\text{PCH } 2.7)}{=} \int \frac{i}{\hbar} \Psi^* \hat{H}\hat{F} \Psi \, dx - \int \frac{i}{\hbar} \Psi^* \hat{F}\hat{H} \Psi \, dx$$

$$= \frac{i}{\hbar}\langle \hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{F}]\rangle$$

Dvs: Når $\hat{F}$ kommuterer med Hamiltonoper. $\hat{H}$, er $\langle F\rangle$ en bevegelseskonstant.

Eks: Når er $\langle p\rangle$ konstant?

Hvis V avhenger av x, er $[\hat{H}, \hat{p}] \neq 0$, for da kommuterer ikke $V(x)$ med $\hat{p} = (\hbar/i)\partial/\partial x$.
Rimelig: Da virker en kraft $F = -dV/dx$ på partikkelen, og $\langle p\rangle$ må endre seg med tiden t.

Hvis V er konstant, har vi en fri partikkel, og $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$, og $\langle p\rangle$ er konstant, som ventet.

Ehrenfests teorem

[PCH 4.4 ; DJG 1.5, 4.1 ; IØ 4.4]

Slår fast at forventningsverdiene $\langle x \rangle$ og $\langle p \rangle$ oppfyller de klassiske bevegelsesligningene. Vi viser dette:

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},x]\rangle = \frac{i}{2m\hbar}\langle[\hat{p}^2,x]\rangle \qquad ([V,x]=0)$$

$$[\hat{p}^2,x] = \hat{p}\hat{p}x - x\hat{p}\hat{p} = \hat{p}\hat{p}x - \hat{p}x\hat{p} + \hat{p}x\hat{p} - x\hat{p}\hat{p}$$

$$= \hat{p}[\hat{p},x] + [\hat{p},x]\hat{p} = -2i\hbar\,\hat{p}$$

$$\Rightarrow d\langle x\rangle/dt = \langle\hat{p}\rangle/m = \langle p\rangle/m \qquad \text{(OK)}$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{p}]\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[V,\hat{p}]\rangle \qquad ([\hat{K},\hat{p}]=0)$$

$$[V,\hat{p}]f(x) = V\frac{\hbar}{i}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}(Vf) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x}\cdot f(x)$$

$$\Rightarrow d\langle p\rangle/dt = -\langle\partial V/\partial x\rangle \qquad \text{(OK, Newtons 2.lov !)}$$

Oppsummert:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1D: \frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{\langle p\rangle}{m} ; & \frac{d}{dt}\langle p\rangle = \langle -\frac{\partial V}{\partial x}\rangle \\ 3D: \frac{d}{dt}\langle \vec{r}\rangle = \frac{\langle\vec{p}\rangle}{m} ; & \frac{d}{dt}\langle\vec{p}\rangle = \langle -\nabla V\rangle \end{array}}$$

Ehrenfests teorem

Vi ser at innsetting av $\langle p\rangle = m\, d\langle x\rangle/dt$ i $d\langle p\rangle/dt = -\langle\partial V/\partial x\rangle = \langle F\rangle$ gir $m\, d^2\langle x\rangle/dt^2 = \langle F\rangle$.

[Men generelt er $\langle F(x)\rangle \neq F(\langle x\rangle)$; PCH 4.4]