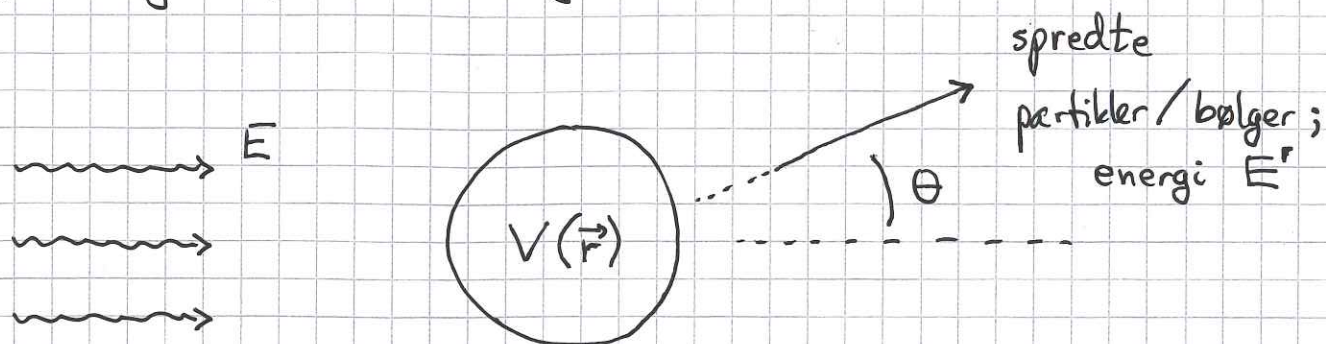


# Spredning. Tunneleffekt

[PCH 3.6 ; DFG 2.5-2.7 ; IØ 3.6]

Spredningseksperimenter, generelt :



partikler/bølger sendes inn; energi E pr partikkel

systemet, repr. ved et spredningspotensial  $V(\vec{r})$

(fotoner, elektroner, nøytroner, ...)

Måling av spredt intensitet  $I(\theta; E')$  gir informasjon om systemet. Relevant i en rekke fysikkemner.

Vi ser på det aller enkleste: Elastisk spredning i en dimensjon.



Bare to mulige utfall for en innkommende partikkel:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Refleksjon, med sannsynlighet } R \\ \text{Transmisjon, " " " } T \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{R+T=1}$$

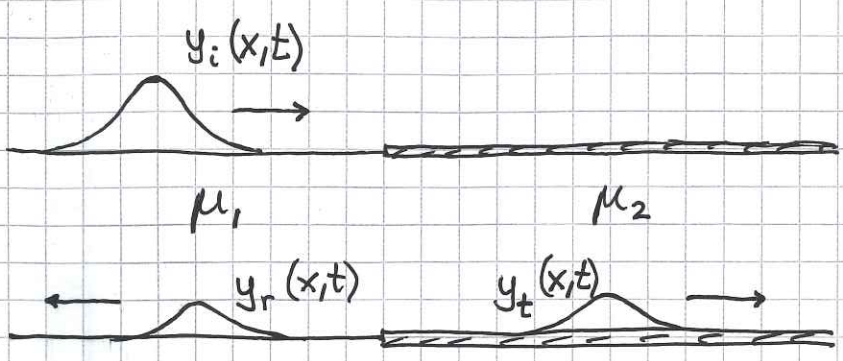
Anta partikkel inn fra venstre, med impuls  $p = \hbar k$  og energi  $E = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$ ; dvs  $V=0$  for  $x < 0$  (og for  $x > L$ ).

Innkommende bølge :  $\Psi_i(x) = e^{ikx}$   
 Reflektert -"- :  $\Psi_r(x) = r e^{-ikx}$  }  $x < 0$

Transmittert bølge :  $\Psi_t(x) = t e^{ikx}$  }  $x > L$

TUSL;  $0 < x < L$  :  $-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) + V(x) \Psi(x) = E \Psi(x)$

Klassisk analogi: Transversal bølge på streng



$\mu$  = strengens masse pr lengdeenhet

Energibevarelse  $\Rightarrow P_i = P_r + P_t$  ;  $P$  = midlere effekt

$T = P_t / P_i =$  andel effekt transmittert }  
 $R = P_r / P_i =$  —"—— reflektert }  $T + R = 1$

Med QM og plane partikkelbølger blir utgangspunktet sannsynlighetsbevarelse :

$j_i = |j_r| + j_t$

$j = \text{Re} \left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{im} \Psi' \right\} =$  sanns. strøm

$T = j_t / j_i =$  transmisjonssanns. }  
 $R = |j_r| / j_i =$  refleksjonssanns. }  $T + R = 1$

$$j_i = \text{Re} \left\{ e^{-ikx} \frac{\hbar}{im} ik e^{ikx} \right\} = \frac{\hbar k}{m}$$

$$j_r = \text{Re} \left\{ r^* e^{ikx} \frac{\hbar}{im} (-ik) r e^{-ikx} \right\} = -|r|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$j_t = \text{Re} \left\{ t^* e^{-ikx} \frac{\hbar}{im} ik t e^{ikx} \right\} = |t|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$\Rightarrow R = |r|^2, \quad T = |t|^2$$

En plan bølge <sup>inn</sup> er en stasjonær tilstand,

$$\Psi_i(x,t) = e^{ikx} e^{-iEt/\hbar},$$

og  $\Psi_r(x,t)$  og  $\Psi_t(x,t)$  har samme faktor  $e^{-iEt/\hbar}$  når spredningsprosessen er elastisk. Da er  $\rho = |\Psi|^2$  overalt uavhengig av tiden  $t$ , og kontinuitetsh ligningen

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

gir en sanns.strøm  $j$  som er uavhengig av  $x$ :

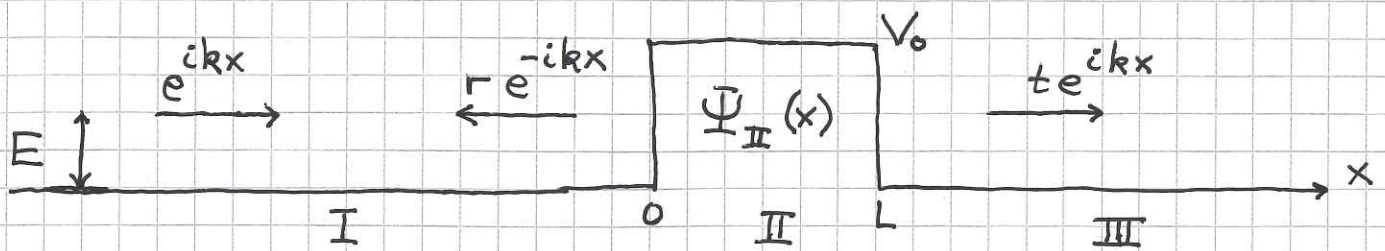
$$j(x > L) = j_t = T \cdot \hbar k/m$$

$$\begin{aligned} j(x < 0) &= \text{Re} \left\{ (\Psi_i^* + \Psi_r^*) \frac{\hbar}{im} \frac{d}{dx} (\Psi_i + \Psi_r) \right\} \\ &= \hbar k/m - |r|^2 \hbar k/m + \frac{\hbar k}{m} \underbrace{\text{Re} \left\{ r^* e^{2ikx} - r e^{-2ikx} \right\}}_{= 0} \end{aligned}$$

$$= (1-R) \cdot \hbar k/m$$

$$= T \cdot \hbar k/m$$

# Eks 1: Firkantbarriere



$E < V_0$ :  $\Psi_{II}'' - \kappa^2 \Psi_{II} = 0$  ;  $\kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$

$\Psi_{II}(x) = A e^{\kappa x} + B e^{-\kappa x}$

$E > V_0$ :  $\Psi_{II}'' + q^2 \Psi_{II} = 0$  ;  $q^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2$

$\Psi_{II}(x) = a e^{iqx} + b e^{-iqx}$

Kontinuerlig  $\Psi$  og  $\Psi'$  i  $x=0$  og  $x=L$  gir 4 lign. som fastlegger  $A, B, r, t$  for  $E < V_0$  ;  $a, b, r, t$  for  $E > V_0$ . (Se s. 63-64, 2016 for detaljer.) Resultat:

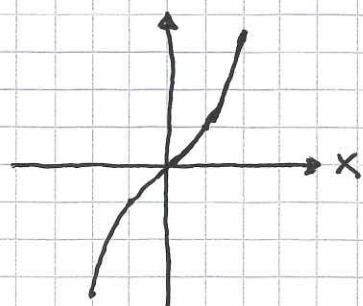
$E < V_0$ :  $T = |t|^2 = \left\{ 1 + \frac{\sinh^2(\kappa_0 L \sqrt{1 - E/V_0})}{4(1 - E/V_0) E/V_0} \right\}^{-1}$

$E > V_0$ :  $T = \left\{ 1 + \frac{\sin^2(\kappa_0 L \sqrt{E/V_0 - 1})}{4(E/V_0 - 1) E/V_0} \right\}^{-1}$

Her er:  $\kappa_0^2 = 2mV_0/\hbar^2$  ;  $k^2 = 2mE/\hbar^2$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\approx \begin{cases} x & ; |x| \ll 1 \\ \frac{1}{2} e^x & ; x \gg 1 \end{cases}$



- Tunneleffekt :  $T > 0$  for  $E < V_0$
- Og  $R > 0$  for  $E > V_0$
- Hvis  $E \ll V_0$  og  $k_0 L \gg 1$  (dvs: liten energi og ganske høy og bred barriere) :  
 $\sinh(k_0 L \sqrt{1 - E/V_0}) \approx \frac{1}{2} \exp(k_0 L) \gg 1$

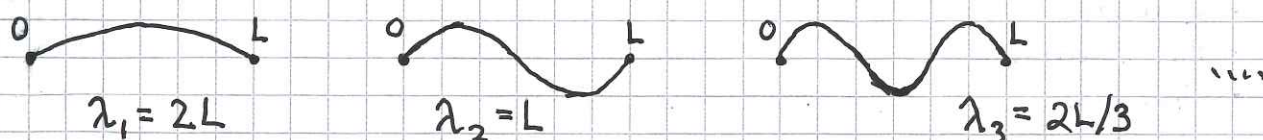
$$\Rightarrow T(E) \approx (16E/V_0) \exp(-2k_0 L) \ll 1$$

dvs:  $T$  avtar eksponentielt med barrierens høyde og bredde

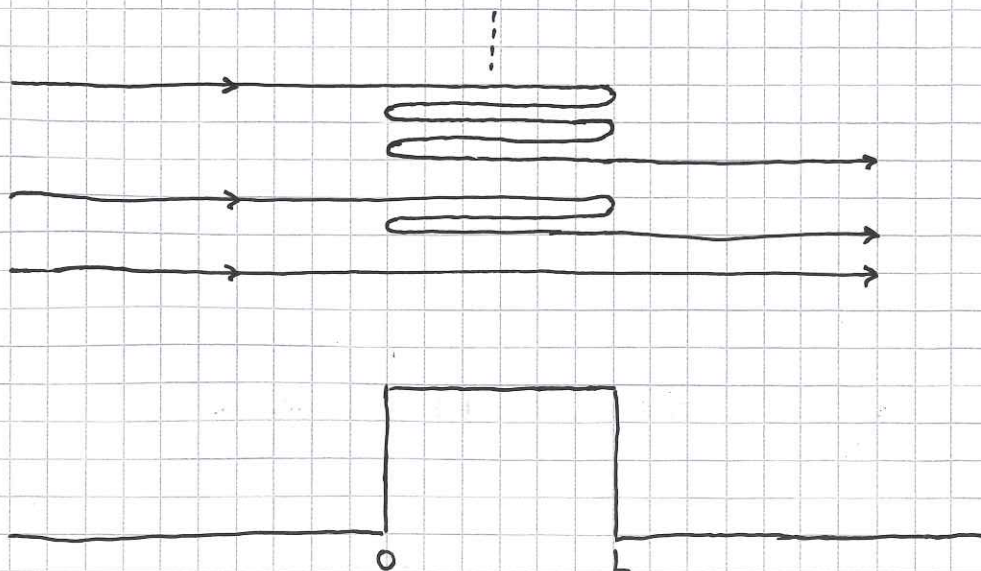
- $T = 1$  når  $\sin(k_0 L \sqrt{E/V_0 - 1}) = 0$ , dvs  
 $k_0 L \sqrt{E/V_0 - 1} = n\pi$ , dvs  $\sqrt{2mV_0/\hbar^2} \cdot L \sqrt{E/V_0 - 1} = n\pi$

$$\Rightarrow E - V_0 = K = n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2mL^2 = p^2 / 2m = (h/\lambda)^2 / 2m$$

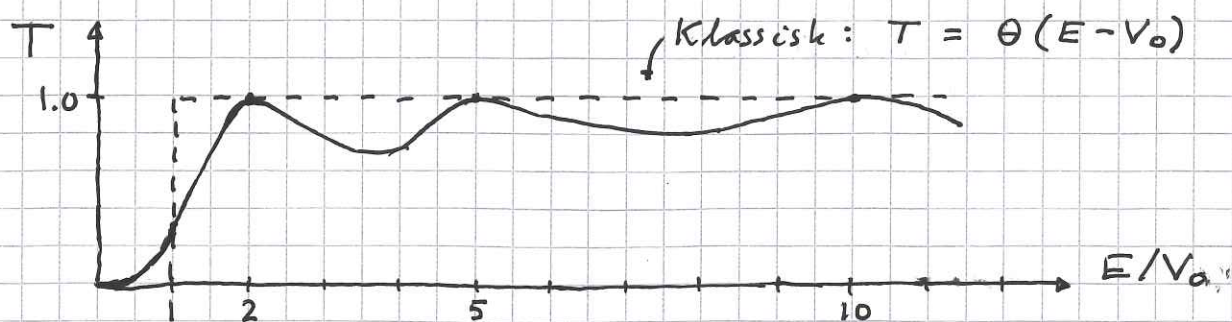
$\Rightarrow$  Stående bølger i barrierområdet, med  $\lambda_n = 2L/n$ ;  $n=1,2,\dots$



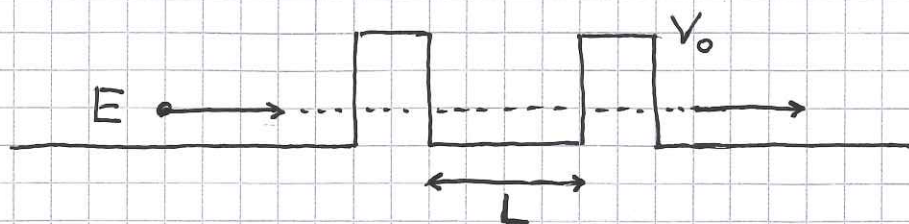
Kan tolkes som konstruktiv interferens mellom klassiske baner med veilengdeforskjell  $n \cdot 2L$  :



Anta f.eks.  $k_0 L = \pi$ , slik at  $T=1$  for  $\frac{E}{V_0} = 1+n^2$ : (69)



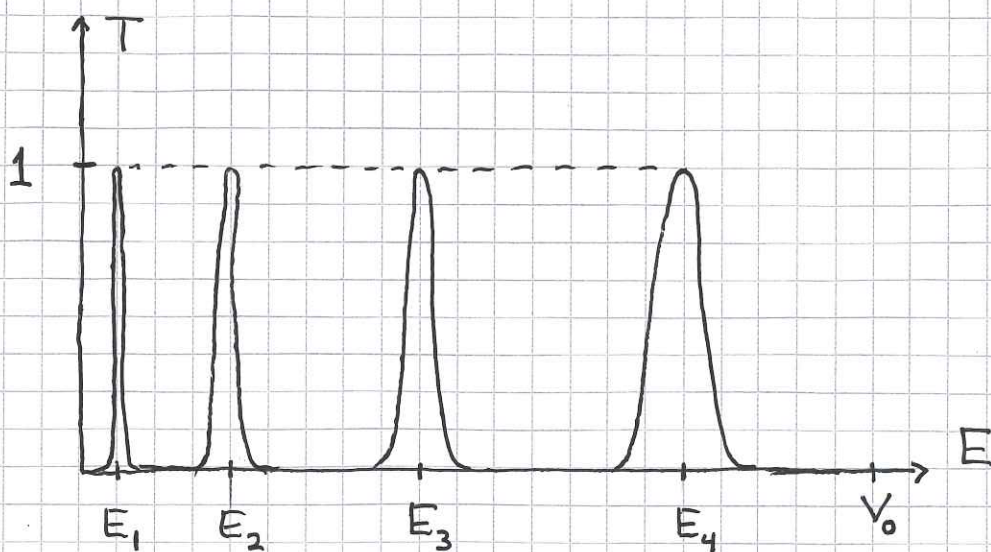
Resonant tunnelering:



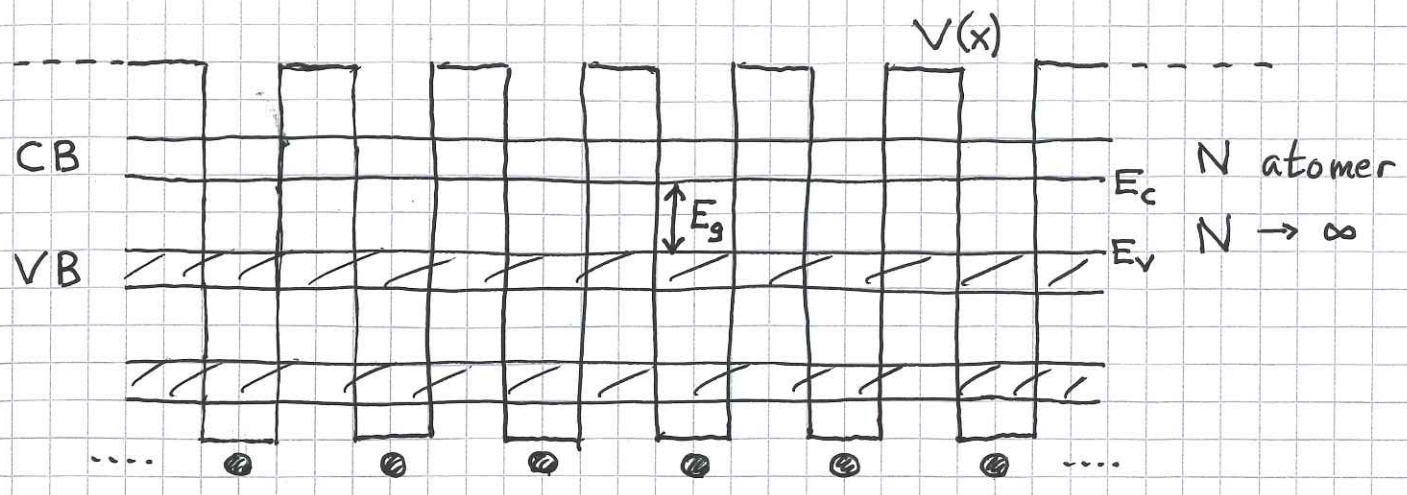
Konstruktiv interferens når brønnen mellom barrierene har bredde  $L = n \cdot \lambda / 2$

$$\Rightarrow T(E_n) = 1 \text{ når } E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{2\pi}{\lambda_n} \right)^2 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

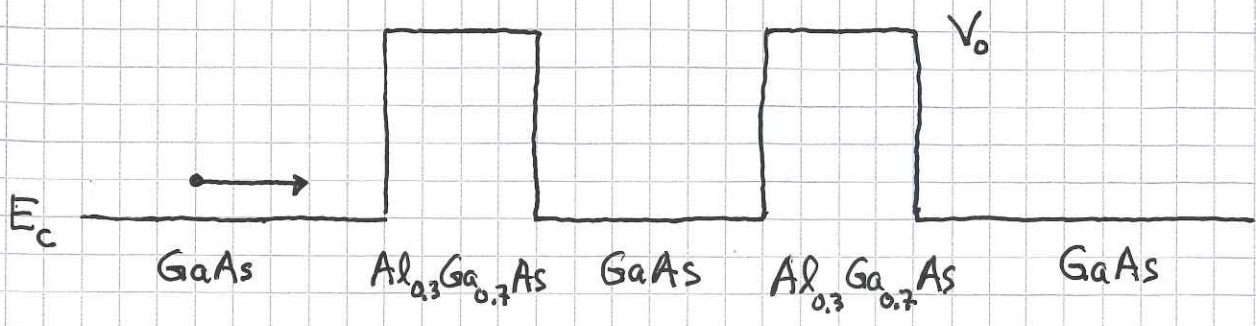
og  $T(E) \ll 1$  når  $E \neq E_n$  og  $E < V_0$



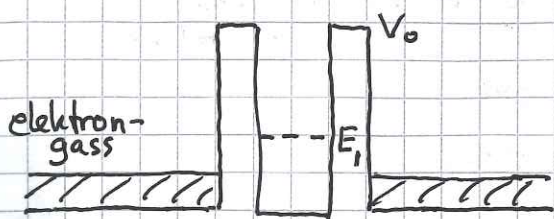
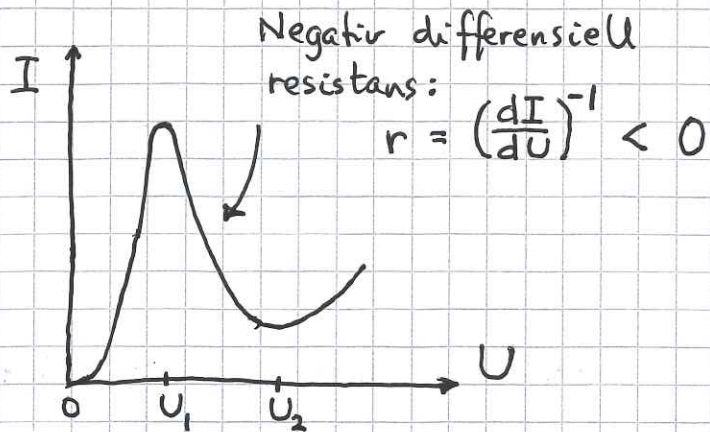
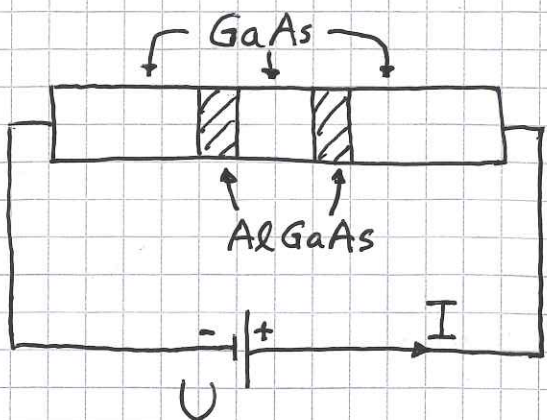
# Faste stoffer : 1D modell



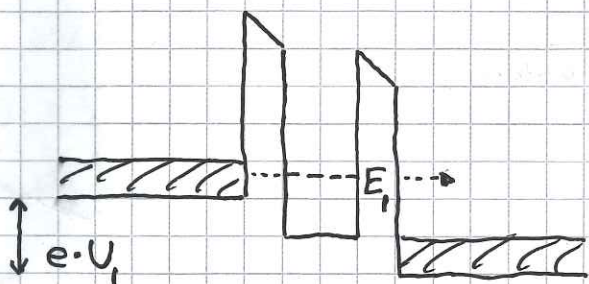
- $2N$  tettliggende tilstander i hvert energibånd :  $N$  romlige orbitaler; 2 ulike spinntilstander for hver orbital
- 2 elektroner fra hvert atom pr energibånd. Pauliprinsippet: Max 1 elektron pr tilstand. Dermed  $Z/2$  fylte bånd, når atomnr.  $Z$
- VB = vælensbånd = øverste fylte bånd. CB = ledningsbånd = laveste tomme bånd ("conduction band").
- $E_g = E_c - E_v =$  materialets båndgap
- Elektroner kan eksiteres til tilstander i CB, fra VB hvis termisk energi  $k_B T$  er av størrelsesorden  $E_g$ , alternativt fra forurensningsatomer med et av sine elektroner i en tilstand med energi  $E_D \approx E_c$  (D: doping)
- GaAs :  $E_g \approx 1.43$  eV ( $\nu/300$  K).  $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$  :  $E_g \approx 1.84$  eV.  
 $E_c(Al_{0.3}Ga_{0.7}As) - E_c(GaAs) \approx 0.23$  eV = barierehøyden  $V_0$  i lagdelt "heterostruktur" ... -GaAs -  $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$  - GaAs - ...



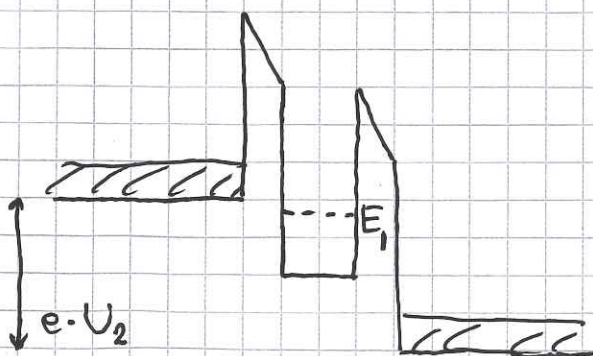
Realisering med halvledere:



$U = 0$   
 $I = 0$



$U = U_1$   
Stor strøm I



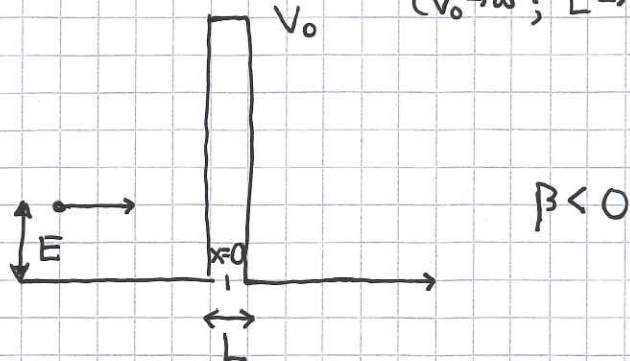
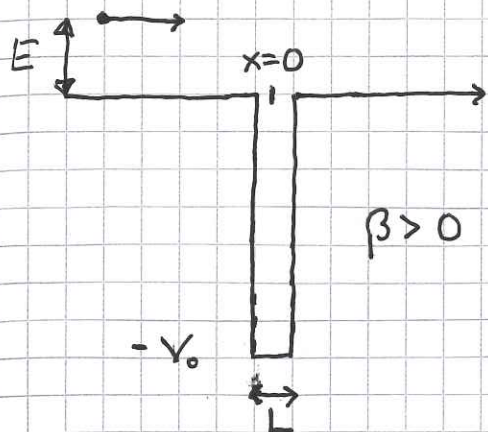
$U = U_2$   
Mindre strøm I

Al GaAs har større båndgap enn GaAs. Resulterer i en potensialbarriere med høyde  $V_0$  for elektroner som er eksitert til ledningsbåndet i GaAs.



Eks 2: Spredning mot  $V(x) = -\beta \delta(x)$ ;  $\beta = V_0 L$

$(V_0 \rightarrow \infty; L \rightarrow 0)$



$x < 0$ :  $\Psi(x) = e^{ikx} + r e^{-ikx}$  ;  $\Psi'(x) = ik(e^{ikx} - r e^{-ikx})$

$x > 0$ :  $\Psi(x) = t e^{ikx}$  ;  $\Psi'(x) = ikt e^{ikx}$

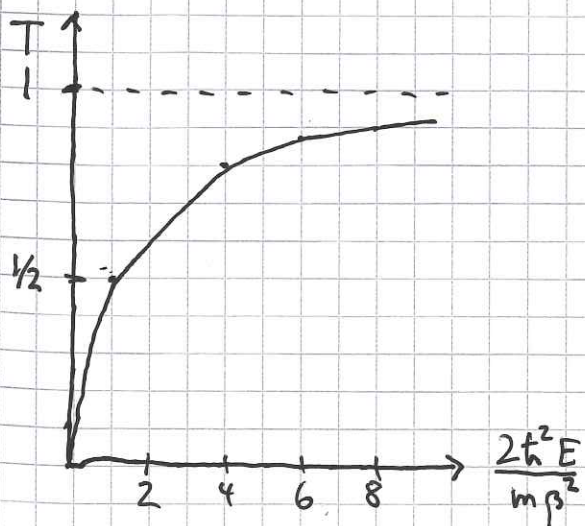
$\Psi(0^+) = \Psi(0^-) \Rightarrow 1 + r = t \Rightarrow r = t - 1$

Fra side 53:  $\Psi'(0^+) - \Psi'(0^-) = (-2m\beta/\hbar^2) \Psi(0)$

$\Rightarrow ikt - ik(1-r) = (-2m\beta/\hbar^2)t$ , som med  $r = t - 1$  gir

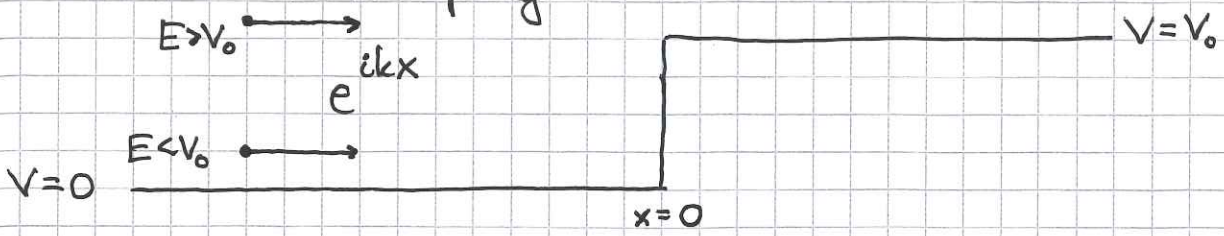
$t = 2ik / (2ik + 2m\beta/\hbar^2) = 1 / (1 + m\beta/ikt^2)$

$\Rightarrow T = |t|^2 = (1 + (\frac{m\beta}{\hbar^2 k})^2)^{-1} = \underline{(1 + m\beta^2/2E\hbar^2)^{-1}}$



Merk at  $T(E)$  er den samme for  $\delta$ -brønn og  $\delta$ -barriere!

### Eks 3 : Potentialsprang



$$E > V_0 : \Psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & ; x < 0 & ; k^2 = 2mE/\hbar^2 \\ te^{iqx} & ; x > 0 & ; q^2 = 2m(E-V_0)/\hbar^2 \end{cases}$$

Kontinuerlig  $\Psi$  og  $\Psi'$  i  $x=0 \Rightarrow 1+r=t$  og  $ik(1-r) = iqt$

som gir  $r = \frac{k-q}{k+q}$  ;  $t = \frac{2k}{k+q}$

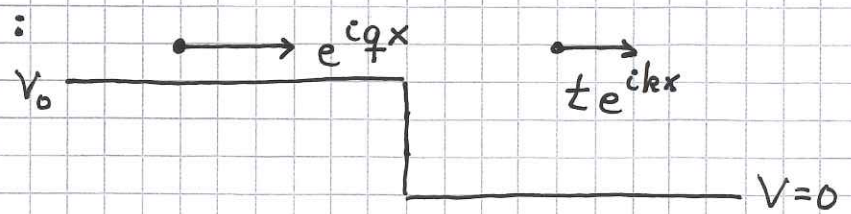
Sanns. strøm:  $j_i = \hbar k/m$  ;  $j_r = -|r|^2 \hbar k/m$  ;  $j_t = |t|^2 \hbar q/m$

$$\Rightarrow R = |j_r|/j_i = |r|^2 = \left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2$$

$$T = j_t/j_i = |t|^2 \cdot q/k = 4kq/(k+q)^2$$

} Sammenlign bølge på streng med skjot i  $x=0$  !

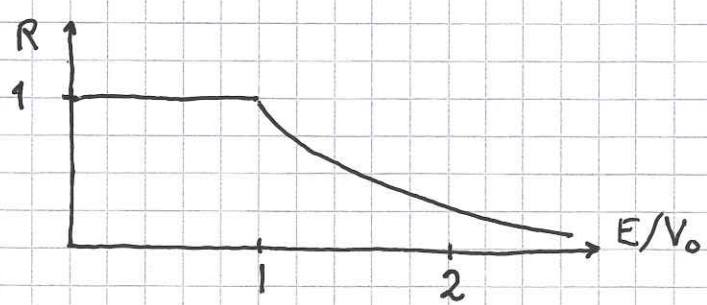
Samme R og T med pot.sprang ned, siden disse er uendret ved ombytte  $k \leftrightarrow q$  :



$$E < V_0 : \Psi(x > 0) = te^{-\kappa x} ; \kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$$

$$\Rightarrow 1+r=t \text{ og } ik(1-r) = -\kappa t$$

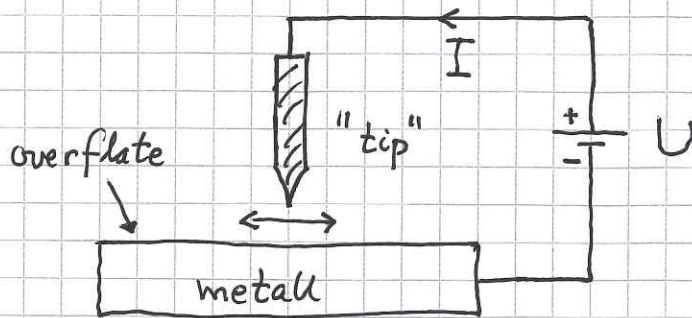
$$\Rightarrow R = |r|^2 = \dots = \left| \frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} \right|^2 = 1 ; \text{ OK}$$



# Tunnelingsmikroskop

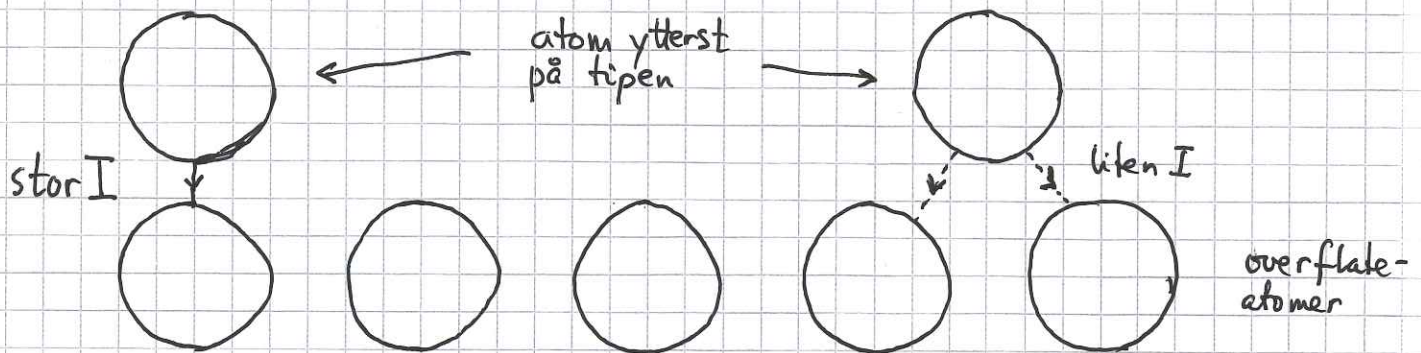
[PCH 3.6.4 ; IØ 3.6.h]

74



STM  
(Scanning  
Tunneling  
Microscope)

På atomær skala :



Tunnelingsstrømmen  $I \sim T \sim \exp(-2\gamma eL)$  er størst når tipen er rett over et overflateatom. "Scanner" tipen fram og tilbake, måler  $I(x,y)$  og oppnår avbildning av overflaten, ~~med~~ med atomær oppløsning.

Binnig & Rohrer, IBM Zürich, NP 1986

(Youtube: A boy and his atom)

Andre anvendelser:

Feltemisjon

$\alpha$ -decay

Se notater 2019. (Ikke pensum 2020)