TFY4215 Innføring i kvantefysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 2.

Oppgave 1

Hva er største mulige bølgelengde på lys som kan absorberes av He^+-ioner i grunntilstanden?

A 20 nm B 30 nm C 40 nm D 50 nm E 60 nm

Oppgave 2

Hva blir radien i grunntilstanden i Li^{2+} i henhold til Bohrs atommodell?

A 476 pm B 159 pm C 53 pm D 18 pm E 6 pm

Oppgave 3

Hva er ionisasjonsenergien til Li^{2+}? Dvs, hvor mye energi skal til for å fjerne det ene elektronet fra Li^{2+} når det befinner seg i grunntilstanden, og dermed danne Li^{3+} og et fritt elektron?

A 122 eV B 40.8 eV C 13.6 eV D 4.5 eV E 1.5 eV

Oppgave 4

Molekyler (masse m) i en gass har en midlere kinetisk translasjonsenergi proporsjonal med den absolutte temperaturen T. Hva er da midlere de Broglie-bølgelengde for molekyler i en slik gass? (h er Plancks konstant.) Denne bølgelengden kalles gjerne den termiske de Broglie-bølgelengden.

A $\lambda = 3k_BT/m$
B $\lambda = \sqrt{3mh/k_BT}$
C $\lambda = h/\sqrt{3mk_BT}$
D $\lambda = 3hT/mk_B$
E $\lambda = 3\sqrt{k_BT}/h$

Oppgave 5

Hva er, ifølge Bohrs atommodell, høyeste hastighet til et elektron i hydrogenatomet?

A $2.2 \cdot 10^3$ m/s
B $2.2 \cdot 10^4$ m/s
C $2.2 \cdot 10^5$ m/s
D $2.2 \cdot 10^6$ m/s
E $2.2 \cdot 10^7$ m/s

Oppgave 6

I vanlige metaller vil hvert atom typisk bidra med et eller to elektroner til en gass av elektroner som er fri til å bevege seg omkring i krystallen. Anta en enkel kubisk krystall med ett fritt elektron pr atom og gitterkonstant (avstand mellom naboatomer) 0.4 nm. Ved hvilken temperatur er den termiske de Broglie-bølgelengden til disse elektronene like stor som avstanden til nærmeste elektron, dvs som gitterkonstanten?

A ca 7 K
B ca 70 K
C ca 700 K
D ca 7000 K
E ca 70000 K

Oppgave 7

En partikkel befinner seg ved tidspunktet $t = 0$ i tilstanden $\Psi(x, 0) = A \exp(-\kappa|x|)$. Hva er A hvis Ψ er normert?

A $1/\sqrt{2}$
B $1/\sqrt{\kappa}$
C $\sqrt{2}$
D $\sqrt{\kappa}$
E $\sqrt{\kappa/2}$

Oppgave 8

Hva er usikkerheten i partikkelens posisjon ved $t = 0$ i forrige oppgave? Dvs, hva er $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$?

A $1/\sqrt{2}\kappa$
B $1/\kappa$
C $\kappa/2$
D $\sqrt{\kappa}/2$
E $1/2$

Oppgave 9

Hva er forventningsverdien til partikkelens impuls i forrige oppgave?

A Null
B $\hbar\kappa$
C $\hbar\kappa/2$
D $\hbar\kappa/3$
E $\hbar\kappa/4$

En liten briefing om forventningsverdier, usikkerheter osv

Eksempel: Terningkast

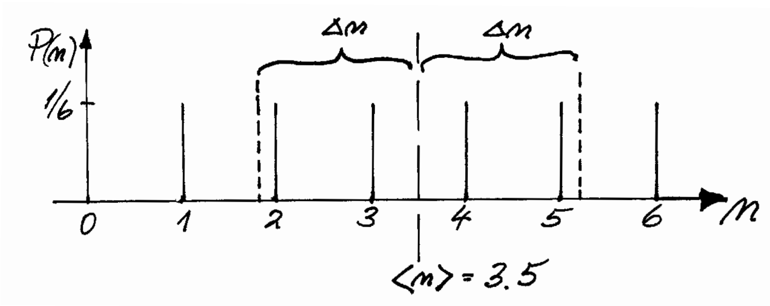
Ved terningkast er sannsynlighetene for å få 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 like store:

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = 1/6.$$

Gjennomsnittsverdien $\bar{n}$ ved et stort antall kast vil da nærme seg den teoretiske **forventningsverdien**, som er

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{6} nP(n) = (1+2+3+4+5+6)\frac{1}{6} = 3.5.$$

Som illustrert i figuren svarer $\langle n \rangle$ til "tyngdepunktet" av sannsynlighetsfordelingen (som i dette tilfellet er diskret).



Figuren illustrerer videre **usikkerheten** (også kalt standardavviket) Δn, som pr definisjon er

$$\boxed{\text{roten av det midlere kvadratiske avviket,}}$$

på engelsk kalt "root-mean-square deviation" (rms-avviket). Vi har altså oppskriften

$$\Delta n = \underbrace{\sqrt{\underbrace{\left\langle \underbrace{(\underbrace{n - \langle n \rangle}_{\text{dev}})^2}_{\text{square}} \right\rangle}_{\text{mean}}}}_{\text{root}}.$$

Da

$$(\Delta n)^2 = \left\langle (n - \langle n \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle n^2 - 2\langle n \rangle n + \langle n \rangle^2 \right\rangle = \left\langle n^2 \right\rangle - \langle n \rangle^2,$$

kan usikkerheten generelt skrives på to måter (du bør memorere begge disse):

$$\Delta n = \sqrt{\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}.$$

Her kan vi nå regne ut

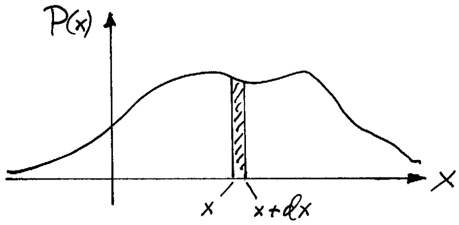
$$\left\langle n^2 \right\rangle = \sum_{n=1}^{6} n^2 P(n) = (1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 6^2) \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Dermed blir usikkerheten i n (altså roten av det midlere kvadratiske avviket fra middelverdien ved et terningkast)

$$\Delta n = \sqrt{91/6 - 3.5^2} \approx 1.71.$$

(Se figuren ovenfor.)

Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling



Figuren illustrerer en kontinuerlig sannsynlighetsfordeling, hvor x f.eks kan være posisjonen til en partikkel, og

$$P(x)dx = |\psi(x)|^2 dx$$

kan være sannsynligheten for å finne partikkelen i intervallet $[x, x + dx]$. Da kaller vi $P(x)$ for en sannsynlighets**tetthet** (sannsynlighet pr lengde-enhet blir det i dette endimensjonale eksemplet). Siden partikkelen har en eller annen posisjon, skal den totale sannsynligheten være lik 1:

$$\int P(x)dx = 1. \qquad \text{(normering)}$$

Forventningsverdien av posisjonen (tyngdepunktet av fordelingen) finner vi slik (analogt med beregningen av $\langle\, n \,\rangle$ på forrige side):

$$\langle\, x \,\rangle = \int xP(x)dx.$$

Videre er

$$\left\langle\, x^2 \,\right\rangle = \int x^2 P(x)dx,$$

osv. Fra disse kan vi finne usikkerheten $\Delta x = (\langle\, x^2 \,\rangle - \langle\, x \,\rangle^2)^{1/2}$.

OPPGAVE 1

Betrakt (den endimensjonale) bølgefunksjonen $\Psi(x,t) = A\, e^{-\lambda|x|} e^{-i\omega t}$, hvor A, λ og ω er reelle, positive konstanter (og $-\infty < x < \infty$). Ifølge Borns sannsynlighetstolkning er $|\Psi(x,t)|^2 dx$ sannsynligheten for å finne partikkelen i intervallet $(x, x + dx)$, forutsatt at Ψ er normert.

a. Skissér $|\Psi(x,t)|^2$ som funksjon av λx. Bestem normeringskonstanten A. [1] [Hint: Både bølgefunksjonen og sannsynlighetstettheten er symmetrisk med hensyn på origo, så integrasjonen kan forenkles.]

b. Finn forventningsverdiene av x og x^2, dvs $\langle\, x \,\rangle$ og $\langle\, x^2 \,\rangle$.

c. Finn usikkerheten for x $(\Delta x = \sqrt{\langle\, x^2 \,\rangle - \langle\, x \,\rangle^2})$. Merk av punktene $\langle\, x \,\rangle - \Delta x$ og $\langle\, x \,\rangle + \Delta x$ i skissen for $|\Psi(x,t)|^2$, for å illustrere hvordan Δx representerer "spredningen" i x. Hva er sannsynligheten for å finne partikkelen utenfor (usikkerhets-)intervallet mellom de to punktene?

[1] Merk at for $n \geq 1$ følger det ved delvis integrasjon at

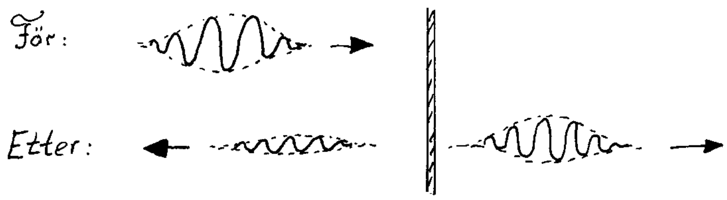
$$I_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = [x^n(-e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty n x^{n-1}(-e^{-x})dx = nI_{n-1}.$$

Da $I_0 = 1$, innser vi herav at

$$I_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \qquad \text{og} \qquad I_n(\alpha) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}; \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

OPPGAVE 2 **Fotoner mot et vindu**

En elektromagnetisk bølgepakke — bygd opp ved superposisjon av planbølger med frekvenser ν i et lite intervall fra $\nu_0 - \Delta\nu$ til $\nu_0 + \Delta\nu$ — faller inn mot et butikkvindu. Ved hjelp av Maxwells ligninger, med dertil hørende grensebetingelser, samt brytningsindeksen $n(\nu_0)$ for glasset, kan en regne ut at bølgepakken ved møtet med vinduet deler seg i en reflektert pakke og en transmittert pakke.



La oss si at energi-innholdet i den reflekterte pakken er 4% av energien i den innkommende pakken, og se bort fra absorpsjon i glasset. — Hva skjer når ett enkelt foton med energi $h\nu_0$ sendes inn mot butikkvinduet? [Hint: Hent inspirasjon fra diskusjonen av dobbeltspalteksperimentet med lys; se Tillegg 1.]

Oppgave 1 etc: Flervalgsoppgaver nummerert fra 1 i en gitt øving.

<u>OPPGAVE 1</u> etc: "Vanlige" oppgaver nummerert fortløpende fra 1 og oppover.