TFY4215 Innføring i kvantefysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 6.

Oppgave 1

Brønnpotensialet $V(x) = -\beta\,\delta(x)$ gir *en* bundet tilstand for en partikkel med masse m. Energien i den bundne tilstanden er

$$E = -\frac{m\beta^2}{2\hbar^2},$$

og tilhørende egentilstand (dvs løsning av TUSL) er

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{m\beta}}{\hbar}\exp(-m\beta|x|/\hbar^2).$$

Hva er $\langle V\rangle$, dvs forventningsverdien av partikkelens potensielle energi, i denne bundne tilstanden?

A $E/4$
B $E/2$
C E
D $2E$
E $4E$

Oppgave 2

Hva er

$$\int_{-4}^{4}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\,\delta(x-2)\,dx?$$

A -2
B -1
C 0
D 1
E 2

Oppgave 3

En partikkel befinner seg i en endimensjonal potensialboks ($V = 0$ inne i boksen, på intervallet $0 < x < L$, $V = \infty$ utenfor boksen) og beskrives ved tidspunktet $t = 0$ av den normerte (ikke-stasjonære) tilstanden $\Psi(x,0) = Ax$ for $0 < x < L/2$ og $\Psi(x,0) = A(L-x)$ for $L/2 < x < L$. Hva er normeringskonstanten A?

A $\sqrt{2/L}$
B $2\sqrt{3}/L\sqrt{L}$
C $3\sqrt{2}/L^{3/2}$
D $\sqrt{11}/L$
E $1/L$

Oppgave 4

Initialtilstanden $\Psi(x,0)$ i oppgave 3 kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av stasjonære energiegentilstander $\psi_n(x)$ i bokspotensialet, dvs $\Psi(x,0) = \sum_1^\infty c_n\psi_n(x)$. Hva er c_1?

A 0
B 1
C $\sqrt{2}/\pi^2$
D $3\sqrt{3}/\pi^2$
E $4\sqrt{6}/\pi^2$

Oppgave 5

Initialtilstanden $\Psi(x,0)$ i oppgave 3 kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av stasjonære energiegentilstander $\psi_n(x)$ i bokspotensialet, dvs $\Psi(x,0) = \sum_1^\infty c_n\psi_n(x)$. Hva er c_2?

A 0
B 1
C $\sqrt{2}/\pi^2$
D $3\sqrt{3}/\pi^2$
E $4\sqrt{6}/\pi^2$

Oppgave 6

Energiegenverdiene i oppgave 3 er E_n, $n = 1, 2, \ldots$. Hva er da et rimelig estimat av forventningsverdien til energien, $\langle E \rangle$, i tilstanden $\Psi(x,0)$?

A Litt mindre enn E_1
B Litt større enn E_1
C Litt mindre enn E_3
D Litt større enn E_3
E Omtrent lik E_4

Oppgave 7

Hva er forventningsverdien av impulsen til partikkelen i oppgave 3?

A $-2\hbar/L$
B $-\hbar/L$
C 0
D $\hbar/L$
E $2\hbar/L$

Oppgave 8

I transmisjonselektronmikroskopet (TEM-en") i kjelleren i kjemiblokk 1 akselereres elektroner (med liten starthastighet) ved hjelp av en spenning på 200 kV. Hva blir elektronenes kinetiske energi?

A 0.16 pJ
B 0.32 MeV
C 2.0 MeV
D 32 fJ
E 2.0 J

Oppgave 9

Hva blir hastigheten til elektronene i oppgave 8?

A 0.695 c
B 0.789 c
C 0.884 c
D 0.978 c
E 1.07 c

Oppgave 10

Hva blir bølgelengden til elektronene i oppgave 8?

A 2.5 cm
B 0.25 mm
C 2.5 μm
D 2.5 nm
E 2.5 pm

OPPGAVE 12 **Diracs δ-funksjon**

a. I uttrykkene nedenfor er $\delta(x)$ Diracs δ-funksjon, jf forelesningene og Appendix B i boka. ♠Fyll ut:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx &= \qquad\qquad ; \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-c) g(x) dx &= \qquad\qquad ; \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(Ax+B) dx &= \qquad\qquad ; \\
\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x-a)+\delta(x-b)] f(x) dx &= \qquad\qquad ; \\
\int_{-1}^{4} [\delta(x-1)+\delta(x+3)] g(x) dx &= \qquad\qquad ; \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x) f(x) dx &= \qquad\qquad ; \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3x-6) f(x) dx &= \qquad\qquad ; \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixa} dx &= \qquad\qquad ; \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixa} dx &= \qquad\qquad ; \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixa} da &= \qquad\qquad ; \quad \text{(NB! Integrasjon over } a\text{)} \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{if_1 f_2} df_1 &= \qquad\qquad ; \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\delta(x-x'') dx &= \qquad\qquad .
\end{aligned}
$$

(Les f_1 og f_2 som "faktor 1" og "faktor 2".)

b. ♠Ved å tegne et diagram vil du se at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \text{const} & \text{for} \quad x < 0, \\ \text{const} + x & \text{for} \quad x > 0 \end{cases}$$

har en "knekk" for $x = 0$. Den deriverte av denne funksjonen er åpenbart **sprangfunksjonen,**

$$\frac{df}{dx} = \Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 0, \\ 1 & \text{for} \quad x > 0. \end{cases}$$

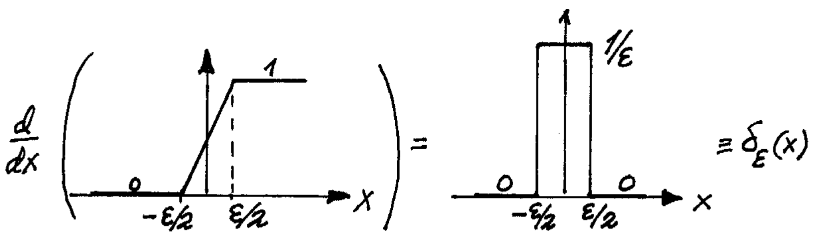
♠Overbevis deg om at den 2.-deriverte av "knekk"-funksjonen $f(x)$, dvs den 1.-deriverte av sprangfunksjonen, er δ-funksjonen:

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d\Theta}{dx} = \delta(x).}$$

Hint: Bruk relasjonen

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{d\Theta(x)}{dx}\, dx = \Theta(\Delta) - \Theta(-\Delta) \qquad (\text{for } \Delta > 0),$$

eller se på relasjonen



i grensen $\epsilon \to 0$.