

**Oppgave 1**

I et isotropt tredimensjonalt potensial  $V(r)$  befinner en partikkel seg i en tilstand  $\psi(r, \theta, \phi)$  med vinkelavhengighet  $Y_{10} = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$ . Hva er (absoluttverdien av) partikkelens dreieimpuls  $L$ ?

- A Null
- B Uskarp
- C  $\hbar$
- D  $\sqrt{2}\hbar$
- E  $2\hbar$

**Oppgave 2**

For partikkelen i oppgave 1, hva er  $L_x$ ?

- A Null
- B Uskarp
- C  $\hbar$
- D  $\sqrt{2}\hbar$
- E  $2\hbar$

**Oppgave 3**

For partikkelen i oppgave 1, hva er  $\langle L_x \rangle$ ?

- A Null
- B Uskarp
- C  $\hbar$
- D  $\sqrt{2}\hbar$
- E  $2\hbar$

**Oppgave 4**

I et isotropt tredimensjonalt potensial  $V(r)$  befinner en partikkel seg i en tilstand  $\psi(r, \theta, \phi)$  med vinkelavhengighet

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{11} - Y_{1-1}) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \cos \phi.$$

Hva er (absoluttverdien av) partikkelens dreieimpuls  $L$ ?

- A Null
- B Uskarp
- C  $\hbar$
- D  $\sqrt{2}\hbar$
- E  $2\hbar$

### Oppgave 5

For partikkelen i oppgave 4, hva er  $L_x$ ?

- A Null
- B Uskarp
- C  $\hbar$
- D  $\sqrt{2}\hbar$
- E  $2\hbar$

### Oppgave 6

For partikkelen i oppgave 4, hva er  $L_z$ ?

- A Null
- B Uskarp
- C  $\hbar$
- D  $\sqrt{2}\hbar$
- E  $2\hbar$

### Oppgave 7

For partikkelen i oppgave 4, hva slags verdier kan en måling av  $L_y$  gi?

- A Null
- B Ikke mulig å si noe om
- C  $\pm\hbar$
- D  $\pm\sqrt{2}\hbar$
- E  $\pm 2\hbar$

### Oppgave 8

De sfæriske harmoniske med  $l = 2$  er

$$\begin{aligned} Y_{20} &\sim \cos^2 \theta \\ Y_{2\pm 1} &\sim \mp \sin \theta \cos \theta \exp(\pm i\phi) \\ Y_{2\pm 2} &\sim \sin^2 \theta \exp(\pm 2i\phi) \end{aligned}$$

Her ser vi bort fra normeringen. Hvilken lineærkombinasjon tilsvarer  $d$ -orbitalen  $d_{x^2-y^2} \sim (x^2 - y^2)/r^2$ ?

- A  $Y_{21} + Y_{2-1}$
- B  $Y_{21} - Y_{2-1}$
- C  $Y_{22} + Y_{2-2}$
- D  $Y_{22} - Y_{2-2}$
- E  $Y_{22} + Y_{20}$

### Oppgave 9

Hvilken lineærkombinasjon tilsvarer  $d$ -orbitalen  $d_{xy} \sim xy/r^2$ ?

- A  $Y_{21} + Y_{2-1}$
- B  $Y_{21} - Y_{2-1}$
- C  $Y_{22} + Y_{2-2}$
- D  $Y_{22} - Y_{2-2}$
- E  $Y_{22} + Y_{20}$

### Oppgave 10

Hvilken lineærkombinasjon tilsvarer  $d$ -orbitalen  $d_{zx} \sim zx/r^2$ ?

- A  $Y_{21} + Y_{2-1}$
- B  $Y_{21} - Y_{2-1}$
- C  $Y_{22} + Y_{2-2}$
- D  $Y_{22} - Y_{2-2}$
- E  $Y_{22} + Y_{20}$

### Oppgave 11

En partikkel med kinetisk energi  $E$  sendes inn mot et potensialsprang  $V_0 > 0$ . Partikkelens impuls er  $\hbar k$  til venstre for potensialspranget og  $\hbar q$  til høyre for potensialspranget. Sannsynligheten for at partikkelen reflekteres ved potensialspranget er da  $R = ((k-q)/(k+q))^2$ . Hva må partikkelens energi være for at den med 90% sannsynlighet skal bli transmittert?

- A  $E = 1.07V_0$
- B  $E = 1.37V_0$
- C  $E = 1.67V_0$
- D  $E = 1.97V_0$
- E  $E = 2.27V_0$

### Oppgave 12

En isotrop todimensjonal harmonisk oscillator,  $V(x, y) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$ , har tillatte energier  $E_N = (N + 1)\hbar\omega$ , med  $N = n_x + n_y$ , der  $n_x, n_y = 0, 1, \dots$ . Hva er (den "orbitale") degenerasjonsgraden til energinivået  $E_N$ ?

- A 1
- B  $\sqrt{N}$
- C  $N$
- D  $N + 1$
- E  $N^2$

### Oppgave 13

Energieigenfunksjoner til den todimensjonale isotrope harmoniske oscillatoren i forrige oppgave er

$$\psi_{n_x n_y}(x, y) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y),$$

dvs på produktform, med funksjoner av  $x$  og  $y$  som i formelvedlegget. Hva er  $L^2$  for en partikkel i tilstanden  $\psi_{10}$ ?

- A Null
- B Uskarp
- C  $\hbar^2$
- D  $2\hbar^2$
- E  $4\hbar^2$

### Oppgave 14

For samme todimensjonale isotrope harmoniske oscillator, hva er  $L_z$  for en partikkel i tilstanden  $\psi_{10}$ ?

- A Null
- B Uskarp
- C  $\hbar^2$
- D  $2\hbar^2$
- E  $4\hbar^2$

### Oppgave 15

For samme todimensjonale isotrope harmoniske oscillator, hva er  $\langle L_z \rangle$  for en partikkel i tilstanden  $\psi_{11}$ ?

- A Null
- B Uskarp
- C  $\hbar^2$
- D  $2\hbar^2$
- E  $4\hbar^2$

### Oppgave 16

For samme todimensjonale isotrope harmoniske oscillator, hvilken tilstand har  $L_z = \hbar$ ?

- A  $\psi_{00}$
- B  $\psi_{11}$
- C  $\psi_{10} + i\psi_{01}$
- D  $\psi_{01} + i\psi_{10}$
- E  $\psi_{20} + i\psi_{02}$

### Oppgave 17

Fem identiske fermioner, uten innbyrdes vekselvirkning, med spinn  $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$  og  $s = 1/2$  befinner seg i dette todimensjonale oscillatorpotensialet. Hva er systemets totale energi i grunntilstanden?

- A  $5\hbar\omega$
- B  $6\hbar\omega$
- C  $7\hbar\omega$
- D  $8\hbar\omega$
- E  $9\hbar\omega$

### Oppgave 18

Egenfunksjoner til  $\hat{L}^2$  og  $\hat{L}_z$  er de sfæriske harmoniske

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \sim P_l^m(x) e^{im\phi},$$

med  $x = \cos \theta$ . Her kan Legendrepolyomene (for  $m = 0$ ) genereres med Rodrigues' formel,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l,$$

mens de assosierte Legendrefunksjonene (for  $m > 0$ ) kan genereres med formelen

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

Hvordan avhenger da  $Y_{30}$  av  $x$ ?

- A  $Y_{30} \sim 5x^3 - 3x$
- B  $Y_{30} \sim 3x^3 + 5x$
- C  $Y_{30} \sim 4x^2 - 1$
- D  $Y_{30} \sim 5x^5 + 3x^3 + x$
- E  $Y_{30} \sim x$

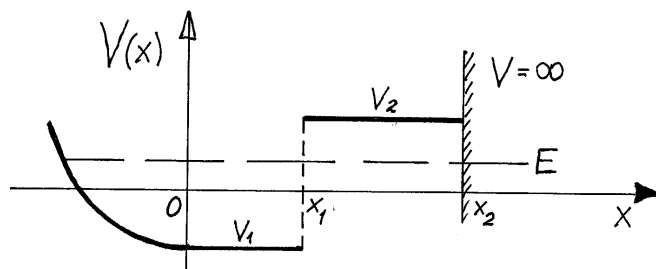
## OPPGAVE 16 Krumning og stykkevis konstante potensialer

I tidligere oppgaver har vi sett at en energieigenfunksjon, dvs en løsning av Schrödingers tidsuavhengige ligning,  $\widehat{H}\psi = E\psi$ , eller

$$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\psi,$$

krummer *mot* akse i klassisk tillatte områder, og *bort fra* akse i klassisk forbudte områder (og eventuelt er lineær i områder hvor  $V(x) = E$ ).

**a.** Noe av barnelærdommen i kvantemekanikk er å vite hvordan dette fungerer for en energieigenfunksjon med energi  $E$  når potensialet er **stykkevis konstant**:



Figuren viser et potensial som er stykkevis konstant i områdene  $0 < x < x_1$  (hvor  $V = V_1$ ) og  $x_1 < x < x_2$  (hvor  $V = V_2$ ). Vi antar at dette systemet har en reell energieigenfunksjon med energien  $E$ , slik at  $V_1 < E < V_2$ . Overbevis deg om at denne i området  $0 < x < x_1$  må ha hva vi kan kalle **trigonometrisk form**:

$$\psi(x) = A \cos kx + B \sin kx = A' \cos(kx - \alpha), \quad k = \sqrt{2m(E - V_1)/\hbar^2},$$

slik at løsningen er sinusformet i dette området og krummer raskere mot akse jo større  $E - V_1$  er. (Sammenlign med boks-løsningene i forelesningene og i boka.) (Moral: Den kinetiske energien,  $K = E - V_1$ , bestemmer bølgetallet og dermed hvor "hurtig"  $\psi(x)$  krummer, og omvendt: Krumningen av  $\psi(x)$  gir beskjed om  $E - V_1$ .)

**b.** Overbevis deg om at løsningen i området  $x_1 < x < x_2$  er hva vi kan kalle **hyperbolsk**,<sup>1</sup>

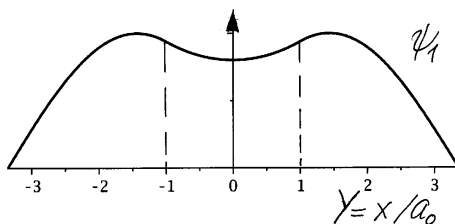
$$\begin{aligned} \psi(x) &= Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{2m(V_2 - E)/\hbar^2} \\ &= C' \sinh \kappa x + D' \cosh \kappa x, \end{aligned}$$

og krummer raskere bort fra akse jo større  $V_2 - E$  er (jf løsningene for endelig potensialbrønn). Løsningen i dette området kan i dette tilfellet også skrives på formen  $\psi = C' \sinh[\kappa(x - x_2)]$ . Forklar hvorfor. [Hint: Skriv løsningen på formen  $\psi(x) = C'' e^{-\kappa(x-x_2)} + D'' e^{\kappa(x-x_2)}$ , eller bruk at også  $\sinh[\kappa(x - x_2)]$  og  $\cosh[\kappa(x - x_2)]$  er to uavhengige løsninger av egenverdligningen for dette området, i likhet med  $e^{\pm \kappa x}$ .] Oppgitt:  $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ ;  $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ .

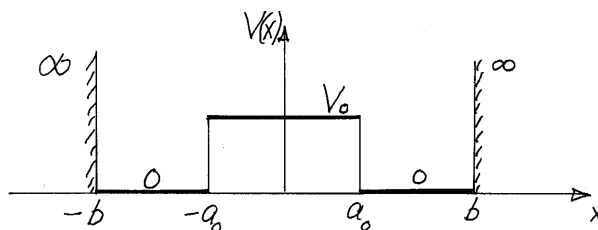
<sup>1</sup>Symbolet  $\kappa$  står for den greske bokstaven "kappa". I dette kurset bruker vi denne når vi har et klassisk forbudt område hvor  $E - V$  er en negativ konstant, mens vi i klassisk tillatte områder med  $E - V$  lik en positiv konstant bruker bølgetallet  $k$ .

**c.** Anta at potensialet  $V(x)$  også er konstant, lik  $V_3$ , langt ute til venstre, dvs for  $-\infty < x < x_3$  (der  $x_3$  ligger et sted til venstre for den delen av potensialet som er inntegnet ovenfor). Betrakt tilfellene (i)  $E < V_3$ , (ii)  $E > V_3$  og (iii)  $E = V_3$ , og avgjør for hvert av disse om den aktuelle egenfunksjonen er *kvadratisk integrerbar* — og dermed beskriver hva vi kan kalle en lokalisert og dermed **bunden** tilstand — eller ikke. Hvis egenfunksjonen ikke er kvadratisk integrerbar, beskriver den en ikke-lokalisert og dermed **ubunden** tilstand. [Hint: Finn ut hvordan  $\psi$  oppfører seg for  $-\infty < x < x_3$  for hvert av de tre tilfellene. I tilfelle (iii) kan du se bort fra muligheten for at  $\psi$  er lik null for  $x < x_3$ .]

**d.**

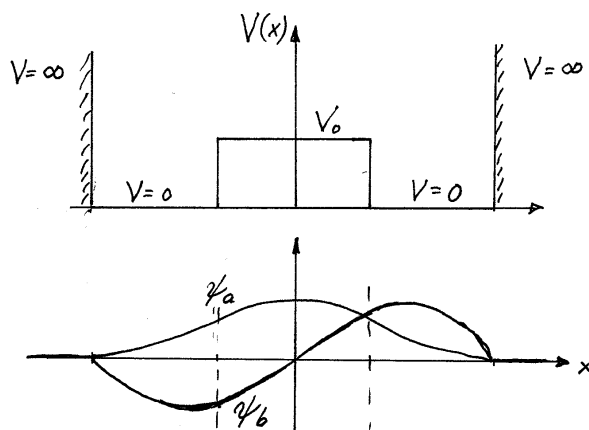


Figuren viser grunntilstanden  $\psi_1$  for potensialet gitt i OPPGAVE 9A:



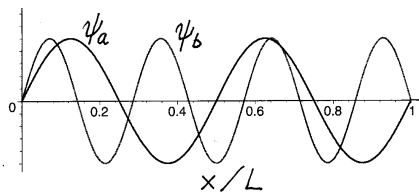
Det opplyses at denne tilstanden har energien  $E_1 \approx 0.67 V_0$ . Hva er da formen til  $\psi_1$  i barriereområdet? [Hint:  $\psi_1$  er symmetrisk.]

**e.** Figuren viser et lignende potensial, samt to funksjoner,  $\psi_a$  og  $\psi_b$ .



Bare den ene av disse er en energieigenfunksjon for dette potensialet. Studér krumningen og avgjør hvilken av funksjonene dette er. Hvorfor er energien for denne tilstanden høyere enn barrierehøyden  $V_0$ ? Hvorfor er energien *bare litt* høyere enn  $V_0$ ? [Hint: Hvilken vei krummer funksjonen i barriereområdet, og krummer den mye eller lite?] Hvorfor kan ikke den andre funksjonen være en energiegentilstand? [Hint: Undersøk om den krummer på en fornuftig måte.]

f.

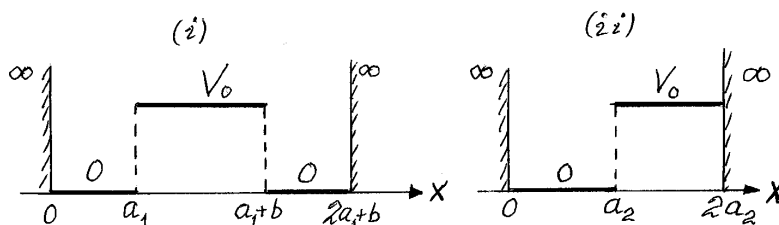


Figuren viser to energiegenfunksjoner for potensialet

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{for } 0 < x < L, \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

Hva er bølgelengdene  $\lambda$ , bølgetallene  $k$ , og den kinetiske energien  $E - V_0$  for de to løsningene? (Partikkelen har massen  $m$ .)

g. To partikler med masse  $m$  beveger seg i hvert sitt potensial:



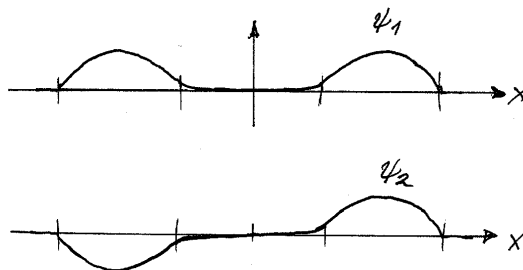
Her er lengdene  $a_1$  og  $a_2$  valgt slik at grunntilstandsenergiene begge er lik  $V_0$ :

$$E_1^{(i)} = E_1^{(ii)} = V_0.$$

Skissér de to grunntilstandene  $\psi_1^{(i)}$  og  $\psi_1^{(ii)}$ . Finn  $a_1$ . Forklar hvorfor  $a_2$  må være større enn  $a_1$ , og finn forholdet  $a_2/a_1$ , om du kan. [Hint: I et symmetrisk potensial er grunntilstanden symmetrisk.]

### OPPGAVE 17 Endimensjonal dobbelt-brønn

a. I denne oppgaven er potensialet av samme type som ovenfor, men barrieren i midten er mye høyere enn ovenfor. Barriere-området blir da nokså “strengt forbudt” klassisk (og nokså “ugjennomtrengelig”) for tilstandene med lavest energi. Dette viser seg bl.a ved at bølgefunksjonene  $\psi_1$  og  $\psi_2$  for grunntilstanden og første eksiterte nivå for dette potensialet, som er henholdsvis symmetrisk og anti-symmetrisk, begge er sterkt “undertrykt” i det forbudte barriereområdet. I de “tillatte” områdene (brønnene) vil løsningene da ligne sterkt på boksløsninger, som vist i figuren.





Forklar med utgangspunkt i krumningen til de to  $\psi$ -ene hvorfor de to energiene ( $E_1$  og  $E_2$ ) må være nokså like i dette tilfellet, slik at  $\Delta E \equiv E_2 - E_1$  blir liten i forhold til  $E_1$  og  $E_2$ . [Hint: Sammenlign bølgelengdene (og dermed bølgetallene) til de sinusformede kurvene i de klassisk tillatte områdene.] Forklar også hvorfor de sinusformede funksjonene i de klassisk tillatte områdene må ha omtrent samme “amplitude”. [Hint: Tenk på at både  $\psi_1$  og  $\psi_2$  skal være normerte.] Merk at dette betyr  $\psi_1$  og  $\psi_2$  er omtrent like i høyre brønn, og omtrent motsatt like i venstre brønn. Forklar også hvorfor de (sterkt understrykte) løsningene i barriereområdet i midten må være av typen  $A \cosh[\kappa_1 x]$  og  $B \sinh[\kappa_2 x]$  for henholdsvis  $\psi_1$  og  $\psi_2$ .

**b.** Anta at vi preparerer systemet i tilstanden  $\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x) + \psi_2(x)]$  ved  $t = 0$ . Løsningen av Schrödingerligningen for  $t > 0$  blir da ifølge Tillegg 2

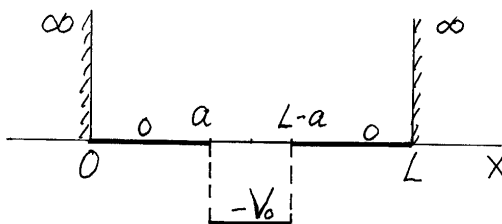
$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x)e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_2(x)e^{-iE_2 t/\hbar}].$$

Argumentér for at partikkelen med stor sikkerhet befinner seg i brønnen til høyre ved  $t = 0$ , og at den omtrent like sikkert befinner seg i brønnen til venstre ved  $t = T/2$ , hvor  $T = 2\pi\hbar/(E_2 - E_1)$ . [Hint: Jf det som ble sagt om  $\psi_1$  og  $\psi_2$  ovenfor, og se på den “relative fasen” mellom de to bidragene ovenfor,  $\exp[-i(E_2 - E_1)t/\hbar]$ .] Partikkelen kommer seg altså gjennom barrieren, selv om denne er høy!

**c.** Fra formelen for  $\Psi(x, t)$  ovenfor er det lett å se at den relative fasefaktoren mellom de to leddene er lik  $-i$  ved  $t = T/4$ , og at sannsynlighetstettheten da blir  $|\Psi(x, T/4)|^2 = \frac{1}{2}(\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x))$ , som er symmetrisk fordelt mellom de to brønnene. Betyr dette at partikkelen har “delt seg”?

## OPPGAVE 18 Modifisert boks

La oss betrakte en partikkel med masse  $m$  som i utgangspunktet befinner seg i grunntilstanden i et bokspotensial  $V(x)$  som er lik null for  $0 < x < L$  og uendelig utenfor. I dette potensialet setter vi i gang med en “utgraving” av en brønn i midten, slik at  $V = -V_0$  for  $a < x < L - a$ .



Her tenker vi oss  $V_0$  holdt fast, slik at det er  $a$  som minker under utgravingen, fra  $L/2$  i utgangspunktet og til slutt mot null. Under denne prosessen vil hvert av energinivåene være strengt avtagende når  $a$  minker, dvs mens vidden av brønnen i midten øker. Dette gjelder også for grunntilstanden  $\psi_1$ , som vi skal fokusere på i denne oppgaven.

**a.** Finn ut hvor stor grunntilstandsenergien  $E_1$  er for  $a = L/2$ , dvs før “utgravingen” starter. Anta at  $V_0 = 16\hbar^2/(2mL^2)$ , og finn så  $E_1$  for  $a = 0$ , dvs etter at vi har “gravd ut” til dybden  $-V_0$  over hele boksen.

**b.** Fra resultatene og det som er sagt ovenfor følger det at grunntilstandsenergien  $E_1$  må være lik null for en viss  $a$ -verdi  $a_1$ . Forklar kvalitativt hvordan grunntilstanden  $\psi_1$  ser ut for dette tilfellet, og lag en prinsippskisse av den. [Hint: Siden potensialet hele tiden er symmetrisk med hensyn på “midtpunktet”  $x = L/2$  av boksen, vil det samme gjelde for  $\psi_1$ .]

**c.** Uansett hvor  $a$  ligger i intervallet  $0 < a < L/2$  vil grunntilstanden ha formen  $\psi_1 = A \cos[k_1(x - L/2)]$  i intervallet  $a < x < L - a$ . Forklar hvorfor. Hvor stort er bølgetallet  $k_1$  for tilfellet  $E_1 = 0$ ? Forholdet  $a_1/L$  for dette tilfellet bestemmes av en betingelse som kan skrives på formen

$$k_1 L \frac{a_1}{L} \tan \left[ k_1 L \left( \frac{1}{2} - \frac{a_1}{L} \right) \right] = \text{constant.}$$

Bruk kontinuiteten av  $\psi'_1/\psi_1$  til å vise dette, og bestem ved dette konstanten på høyresiden. Det opplyses at  $a_1/L$  ligger mellom 0.33 og 0.35. Bruk kalkulatoren til å finne  $a_1/L$  med 3 siffrers nøyaktighet (ved å prøve deg fram noen ganger).

### OPPGAVE 19 3-dimensjonal isotrop harmonisk oscillator

Vi har tidligere studert egenfunksjonen (orbitalen) for grunntilstanden i hydrogenlignende atomer, og skal senere sette oss grundig inn i de eksiterte tilstandene.

Som en liten forberedelse skal vi i denne oppgaven se på orbitaler for en partikkel med masse  $m$  som beveger seg i det isotrope harmoniske oscillatorpotensialet  $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)$ . I forelesningene har vi sett hvordan en vha energieigenfunksjoner for den endimensjonale oscillatoren,

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= C_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar} & (E = \frac{1}{2}\hbar\omega, \text{ paritet } +) \\ \psi_1(x) &= C_1 x e^{-m\omega x^2/2\hbar} & (E = \frac{3}{2}\hbar\omega, \text{ paritet } -) \\ \psi_2(x) &= C_2 \left(4x^2 - \frac{2\hbar}{m\omega}\right) e^{-m\omega x^2/2\hbar} & (E = \frac{5}{2}\hbar\omega, \text{ paritet } +), \text{ etc} \end{aligned}$$

kan konstruere energieigenfunksjoner for den tredimensjonale isotrope oscillatoren på produktform. Grunntilstanden er entydig gitt ved

$$\psi_{000} \equiv (000) = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_0(z) = C_0^3 e^{-m\omega r^2/2\hbar}.$$

For første eksiterte nivå, med  $n_x + n_y + n_z \equiv N = 1$ , har vi tre uavhengige og ortonormerte tilstander:

$$\begin{aligned} \psi_{100} &\equiv (100) = \psi_1(x)\psi_0(y)\psi_0(z) = C_0^2 C_1 x e^{-m\omega r^2/2\hbar}, \\ \psi_{010} &\equiv (010) = \psi_0(x)\psi_1(y)\psi_0(z) = C_0^2 C_1 y e^{-m\omega r^2/2\hbar}, \\ \psi_{001} &\equiv (001) = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_1(z) = C_0^2 C_1 z e^{-m\omega r^2/2\hbar}, \end{aligned}$$

osv, som diskutert i Tillegg 5. I denne oppgaven bruker vi (ved siden av kartesiske koordinater) også kulekoordinater  $r, \theta, \phi$ , definert ved

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

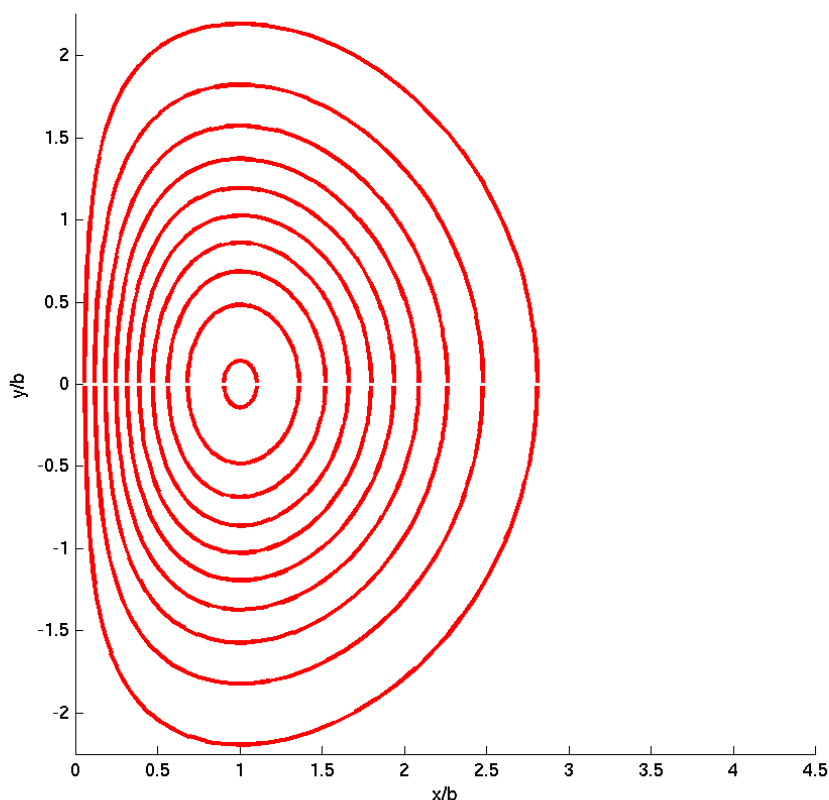
(Her er  $0 \leq r \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Se side 5 i Tillegg 5.)

**a.** Funksjonen (orbitalen)  $\psi_{001}$  er rotsjonssymmetrisk mhp en akse og antisymmetrisk mhp et plan. Hvilken akse og hvilket plan? [Hint: Avhenger funksjonen av asimutvinkelen  $\phi$ ?] Hvorfor kan vi kalle  $xy$ -planet et **nodeplan** for denne orbitalen?

Sannsynlighetstettheten for orbitalen  $\psi_{001}$  er maksimal i to punkter. Hvorfor må disse punktene ligge på  $z$ -aksen? [Hint: Det er minst to måter å tenke på: (i) Hvis vi bruker kulekoordinater og holder  $r$  fast, for hvilke vinkler er da sannsynlighetstettheten  $\psi_{001}^2$  maksimal? (ii) Hvis vi bruker kartesiske koordinater og holder  $z$  fast, for hvilke  $x$  og  $y$  er da  $\psi_{001}^2$  maksimal?] Hvor på  $z$ -aksen ligger de to punktene? [Hint: Deriver sannsynlighetstettheten på  $z$ -aksen.]

I hvilken forstand kan vi si at de to andre orbitalene for  $N = 1$  har *samme form* som  $\psi_{001}$ ?

**b.**



Figuren viser halvparten av et snitt i  $xy$ -planet av en av de tre orbitalene for  $N = 1$ . Mer presist er det slik at bølgefunksjonen (og dermed også sannsynlighetstettheten) er konstant langs hver av kurvene. For den ytterste kurven er verdien av  $\psi$  9% av maksimalverdien. Så øker verdien i skritt på 10%, slik at den innerste kurven angir hvor verdien av  $\psi$  er 99% av maksimalverdien. Hvilken orbital dreier det seg om? Forklar med ord hvordan det tilsvarende bildet ser ut for  $x < 0$ . Hva er fortegnet på  $\psi$  for  $x < 0$ ?

Prøv å se for deg at hele dette bildet (både for positive og negative  $x$ ) roteres rundt  $x$ -aksen (den horisontale symmetriaksen gjennom punktet  $x = y = z = 0$ , som ikke er tegnet inn i figuren ovenfor). Hver av kurvene genererer da en flate, som vi godt kan kalle en “lik-sannsynlighets-flate”, analogt med at hver av kurvene kalles en “lik-sannsynlighets-kurve”. De ytterste flatene gir da brukbare tredimensjonale bilder av denne orbitalen (med mesteparten av sannsynligheten på “innsiden”). Også *denne* orbitalen har en nodeflate. Hvilken flate er dette? Maksimum for denne orbitalen opptrer for  $x/b = 1$ , der  $b$  er “lengde-enheten” som er brukt i figuren. Hva er  $b$  uttrykt ved de aktuelle parametrene i denne problemstillingen?

**c.** Kontrollér at pariteten til de tre tilstandene  $\psi_{100}$ ,  $\psi_{010}$  og  $\psi_{001}$  er den samme som for de tre vinkelfunksjonene  $Y_{1m}$  ( $m = 0, \pm 1$ ):

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}.$$

[Hint: En funksjon som er symmetrisk mhp origo har *like* paritet. En antisymmetrisk funksjon har *odde* paritet. Paritetsoperatoren (rom-inversjon) svarer til at  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ,  $\phi \rightarrow \phi + \pi$ . I Tillegg 5 vises det ellers at pariteten til de sfæriske harmoniske  $Y_{lm}$  er  $(-1)^l$ .]

**d.** Ifølge Tillegg 5 skal det gå an å finne simultane egenfunksjoner til Hamilton-operatoren  $\widehat{H}$  (for den isotrope oscillator) og dreieimpulsoperatorene

$$\widehat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad \text{og} \quad \widehat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

på formen  $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ . Vis at de tre funksjonene  $\psi_{001}$  og  $\mp(\psi_{100} \pm i\psi_{010})/\sqrt{2}$  alle kan skrives på formen  $R(r)Y_{1m}(\theta, \phi)$ , med  $m = 0, \pm 1$ , og med samme radialfunksjon  $R(r)$ . [Moral: Radialfunksjonen er den samme for de  $2l + 1$  verdiene av kvantetallet  $m$ . Mer moral: Energiegenfunksjonene for et degenerert nivå er ikke unike; vi står fritt til å linerkombinere dem.]

**e.** Hvor mange energiegentilstander har vi for *andre* eksiterte nivå,  $N = n_x + n_y + n_z = 2$ ? Hva er pariteten til *disse* energiegenfunksjonene?

Også tilstandene med  $N = 2$  kan lineærkombineres til tilstander på formen  $R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$  (der  $R(r)$  atskiller seg fra funksjonen  $R(r)$  i punkt **d**). Påvis at lineærkombinasjonen  $[(200) + (020) + (002)]/\sqrt{3}$  er en egenfunksjon til  $\widehat{\mathbf{L}}^2$  med egenverdi lik null, dvs en såkalt *s*-tilstand (med  $l = 0$ ). [Hint: Vis at denne lineærkombinasjonen bare avhenger av  $r$ .]

**f.** Hvor mange uavhengige lineærkombinasjoner kan vi danne av egenfunksjonene for  $N = 2$ ? Hvilke andre  $l$ -kvantetall (enn  $l = 0$ ) kan en da vente å finne for  $N = 2$ ? [Hint: Antall  $m$ -kvantetall for en gitt  $l$  er  $2l + 1$ .]