

TILLEGG 12

12 Magnetiske momenter. Spinn

Hypotesen om elektronets spinn (indre dreieimpuls) ble framsatt alt i 1925 av Uhlenbeck og Goudsmit, omtrent samtidig med Heisenbergs og Schrödingers formuleringer av kvantemekanisk teori og oppdagelsen av Pauli-prinsippet. De viktigste eksperimentelle ledetrådene som førte fram til spinnhypotesen var

- Finstrukturen av optiske spektra
- Zeeman-effekten
- Stern–Gerlachs eksperiment

Alle disse effektene har noe å gjøre med hvordan en partikkel med spinn og/eller banedreieimpuls oppfører seg i et magnetfelt.

I avsnitt 12.1 i dette tillegget skal vi først se på det magnetiske momentet fra en ladet partikkel i bevegelse, både klassisk og kvantemekanisk. Deretter går vi gjennom eksperimentet til Stern og Gerlach, som indikerer at elektronet har en indre dreieimpuls (spinn). Vi gir også en oversikt over spinnene til andre partikler.

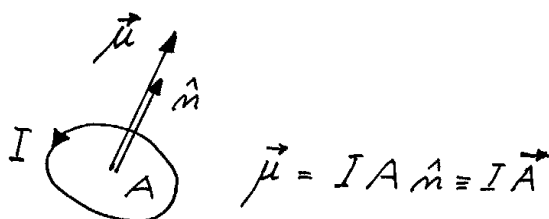
I avsnitt 12.2 etablerer vi en formalisme for spinn $\frac{1}{2}$, basert på den generelle diskusjonen av dreieimpuls i Tillegg 11.

12.1 Magnetiske momenter knyttet til banedreieimpuls og spinn

12.1.a Klassisk magnetisk moment

(Hemmer s 178, 1.5 i B&J)

Først litt klassisk elektrodynamikk.



I elektromagnetisk teori (se f.eks D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, kapittel 6) lærer en at en infinitesimal strømsløyfe plassert i et magnetfelt påvirkes av et dreiemoment

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (\text{T12.1})$$

og en kraft

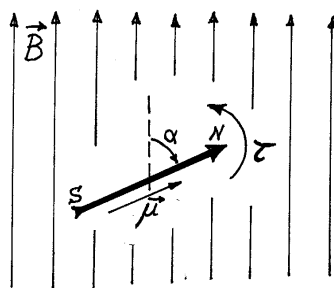
$$\mathbf{F} = -\nabla(-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}). \quad (\text{T12.2})$$

Her er $\boldsymbol{\mu}$ det **magnetiske (dipol-)momentet** til den infinitesimale strømsløyfen. For en plan sløyfe som omslutter et areal A er dette magnetiske momentet

$$\boldsymbol{\mu} = I A \hat{\mathbf{n}} \equiv I \mathbf{A},$$

der I er strømmen og $\hat{\mathbf{n}}$ er enhetsvektoren normalt på sløyfeplanet.

Samme sak observeres når en liten stavmagnet plasseres i et magnetfelt.



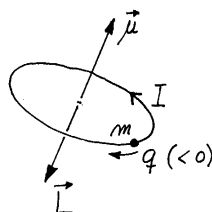
Denne påvirkes av et dreiemoment

$$\tau(\alpha) = -\mu B \sin \alpha = -\frac{\partial}{\partial \alpha}(-\mu B \cos \alpha) = -\frac{\partial}{\partial \alpha}(-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}). \quad (\text{T12.3})$$

Merk at denne relasjonen er analog med $F_x(x) = -\partial V/\partial x$. Ligningene (T12.2) og (T12.3) viser at det magnetiske momentet $\boldsymbol{\mu}$ plassert i magnetfeltet \mathbf{B} svarer til en vekselvirkningsenergi

$$E_\mu = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (\text{T12.4})$$

Nullpunktet til denne potensielle energien er valgt slik at E_μ er lik null når $\boldsymbol{\mu} \perp \mathbf{B}$, og maksimal (og positiv) når $\boldsymbol{\mu}$ og \mathbf{B} er antiparallelle. Minimum har vi når $\boldsymbol{\mu}$ er parallell med \mathbf{B} ; det er slik magnetnåla helst vil peke.



Enda et eksempel: Figuren viser en partikkel med masse m og ladning $q (< 0)$ som holdes i en klassisk sirkelbane i et sentralfelt $V(r)$. Også denne danner en strømsløyfe. Med

baneradius r , hastighet v og omløpsfrekvens $\nu = v/(2\pi r)$ er strømmen $I = q\nu$. Dette gir et magnetisk moment

$$|\boldsymbol{\mu}| = I A = q \frac{v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} q r v = \frac{1}{2} q |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|.$$

Det magnetiske momentet knyttet til ladningens sirkelbevegelse er altså proporsjonalt med baneimpulsen $\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$:

$$\boldsymbol{\mu}_L = \frac{q}{2m} \mathbf{L}. \quad (\text{T12.5})$$

Forholdet $q/2m$ mellom disse to størrelsene kalles det **gyromagnetiske forholdet**.

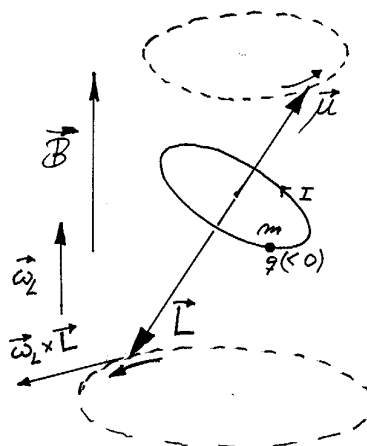
La oss også ta med at for en slik klassisk bevegelse vil \mathbf{L} og $\boldsymbol{\mu}_L$ ikke være bevegelseskonstanter, dersom bevegelsen foregår i et magnetfelt. Fra Newtons 2. lov samt (T12.1) har vi nemlig at

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}_L \times \mathbf{B} = -\frac{q}{2m} \mathbf{B} \times \mathbf{L} \equiv \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}. \quad (\text{T12.6})$$

Fra denne ligningen følger det at at \mathbf{L} (og dermed $\boldsymbol{\mu}_L$) **preseserer**. Presesjonsfrekvensen,

$$\boldsymbol{\omega}_L \equiv -\frac{q}{2m} \mathbf{B}, \quad (\text{T12.7})$$

er kjent som den såkalte **Larmor-frekvensen**.



Med disse klassiske betraktningene som innledning skal vi nå se hva kvantemekanikken har å si om disse tingene.

12.1.b Magnetisk moment fra banebevegelse – kvantemekanisk

Ut fra den klassiske sammenhengen (T12.5) ser vi at den kvantemekaniske operatoren som skal svare til observabelen $\boldsymbol{\mu}_L$ (det magnetiske momentet knyttet til banebevegelsen) må være

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_L = \frac{q}{2m} \hat{\mathbf{L}} = \frac{q}{2m} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} \quad (\text{T12.8})$$

for en partikkel med masse m og ladning q . Som et eksempel kan vi se på “smultring”-tilstanden

$$\psi_{211} = -(64\pi a_0^5)^{-1/2} r e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{i\phi}$$

for hydrogenatomet. Denne er en egentilstand til \hat{L}_z med egenverdi \hbar . Ifølge (T12.8) er den da også en egentilstand til

$$(\hat{\boldsymbol{\mu}}_L)_z = \frac{-e}{2m_e} \hat{L}_z,$$

med egenverdi $-e\hbar/(2m_e)$. (I dette eksemplet neglisjerer vi forskjellen mellom elektronmassen og den reduserte massen.)

Det er instruktivt å se litt nærmere på dette eksemplet. Sannsynlighetsfordelingen er smultring-formet og selvsagt tidsuavhengig, som for alle stasjonære tilstander,

$$\rho_{211} = \frac{1}{64\pi a_0^5} r^2 e^{r/a_0} \sin^2 \theta.$$

Inne i denne smultringen går det en sannsynlighetsstrøm. Denne finnes fra formelen for sannsynlighets-strømtettheten:

$$\mathbf{j} = \Re \left[\psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla \psi \right]; \quad \nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Her ser vi at komponentene av gradienten i r - og θ -retningene gir imaginære bidrag til hakeparentesen, og dermed null bidrag til \mathbf{j} . Sannsynligheten i smultringen strømmer altså i ϕ -retningen. Innsetting gir

$$\mathbf{j} = \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{\hbar/m_e}{64\pi a_0^5} r e^{-r/a_0} \sin \theta = \hat{\mathbf{e}}_\phi \rho_{211} \cdot \frac{\hbar}{m_e} \frac{1}{r \sin \theta}.$$

Ved å sette $\mathbf{j} = \rho_{211} \mathbf{v}$ kan vi regne ut den lokale hastigheten til sannsynlighetsstrømmen:

$$v = \frac{|\mathbf{j}|}{\rho_{211}} = \frac{\hbar}{m_e} \frac{1}{r \sin \theta} = \alpha c \frac{a_0}{r \sin \theta}.$$

Her er $r \sin \theta$ — avstanden fra z -aksen — selvsagt typisk av størrelsesorden Bohrradien a_0 , slik at hastigheten er av størrelsesorden αc , som vi kunne vente. Men legg merke til at denne strømningshastigheten er variabel; det er ingen “fast smultring” som strømmer rundt z -aksen.

Sannsynligheten ρd^3r i volumelementet d^3r svarer til et impulsbidrag $\rho d^3r \cdot m\mathbf{v} = m\mathbf{j}d^3r$ og et ladningsstrøm-bidrag $-e\mathbf{j}d^3r$. Det første ser vi også slik (siden $\langle \mathbf{p} \rangle$ er reell):

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int \psi^* \frac{\hbar}{i} \nabla \psi d^3r = m \int \Re \left[\psi^* \frac{\hbar}{im} \nabla \psi \right] d^3r = \int m\mathbf{j} d^3r.$$

Forventningsverdiene av L_z og $(\mu_L)_z$ kan regnes ut på tilsvarende måte, og resultatene blir som forventet: Da $(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{e}}_\phi)_z = r \sin \theta$, har vi

$$\begin{aligned} \langle L_z \rangle_{211} &= \int \psi_{211}^* \left(\mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla \right)_z \psi_{211} d^3r = \int (\mathbf{r} \times m_e \mathbf{j})_z d^3r \\ &= \int r m_e j \sin \theta d^3r = \int \hbar \rho_{211} d^3r = \hbar, \end{aligned}$$

og

$$\langle (\mu_L)_z \rangle_{211} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times (-e\mathbf{j})]_z d^3r = \frac{-e\hbar}{2m_e} \int \rho_{211} d^3r = \frac{-e\hbar}{2m_e}, \quad \text{q.e.d.}$$

Dette eksemplet illustrerer sammenhengen mellom banedreieimpuls og magnetisk moment for en ladet partikkel.

Som illustrert i dette eksemplet innebærer operator-relasjonen (T12.8) at det magnetiske momentet $\boldsymbol{\mu}_L$ knyttet til banebevegelsen blir kvantisert på samme måte som banedreieimpulsen. Dvs at størrelsen og en av komponentene kan ha skarpe verdier samtidig. For et elektron (med $q = -e$) innebærer dette at størrelsen kan ha verdiene

$$|\boldsymbol{\mu}_L| = \frac{e}{2m_e} |\mathbf{L}| = \mu_B \sqrt{l(l+1)}; \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{T12.9})$$

mens f.eks z -komponenten kan ha verdiene

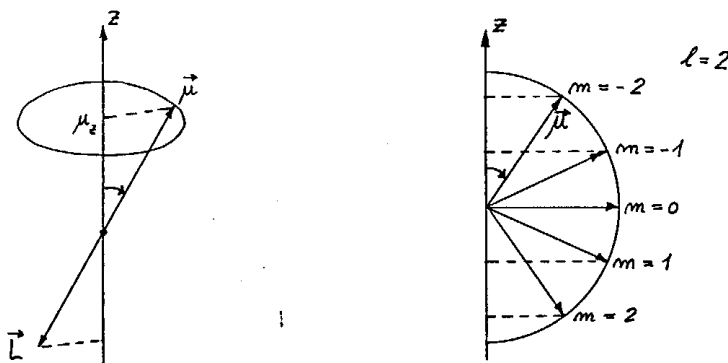
$$(\mu_L)_z = -\frac{e}{2m_e} L_z = -m\mu_B; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (\text{T12.10})$$

Her er størrelsen

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (1 \text{ Bohr-magneton}) \quad (\text{T12.11})$$

den naturlige enheten for det magnetiske momentet til et elektron, analogt med at \hbar er den naturlige enheten for dreieimpuls. [$1 \mu_B = 5.788 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T(esla)}$.]

Vi kan også merke oss at kvantiseringen av L_z og $(\mu_L)_z$ svarer til en retningskvantisering, dvs bestemte vinkler mellom vektoren $\boldsymbol{\mu}_L$ og z -aksen.

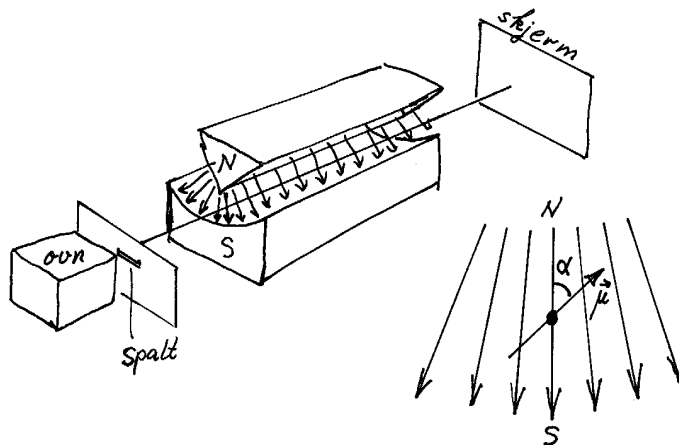


Ellers kan vi merke oss at siden \mathbf{L} og $\boldsymbol{\mu}_L$ ikke er *klassiske* bevegelseskonstanter i et magnetfelt, blir de heller ikke **kvantemekaniske bevegelseskonstanter**. Med dette mener vi at *forventningsverdiene* $\langle \mathbf{L} \rangle$ og $\langle \boldsymbol{\mu}_L \rangle$ ikke blir konstante. Disse forventningsverdiene vil faktisk presesere akkurat på samme måte som de klassiske størrelsene.

12.1.c Stern–Gerlachs eksperiment. Elektronets spinn

(Avsnitt 4.4 i Griffiths, 1.5 i B&J.)

I et *homogent* magnetfelt påvirkes det magnetiske momentet $\boldsymbol{\mu}$ bare av dreiemomentet $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$; kraften $\mathbf{F} = -\nabla(-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$ er da lik null, og det magnetiske momentet nøyter seg med å presesere omkring \mathbf{B} , slik vi diskuterte ovenfor. Stern og Gerlachs ide i 1921 var:



La oss forsøke å måle det magnetiske momentet til et atom ved å sende en *stråle* av slike atomer, avgrenset av en tynn horisontal spalte, gjennom et *inhomogent* magnetfelt og måle *avbøyningen*. Med et inhomogent magnetfelt som antydnet i figuren fås nemlig en vertikal avbøyning (i z -retningen), dersom vi lar strålen gå der hvor feltet peker vertikalt. Dette kan vi vise ved å regne med en enkel modell for et slikt inhomogent magnetfelt:

$$\mathbf{B} = ax\hat{e}_x - (B_0 + az)\hat{e}_z,$$

der $a = -\partial B_z/\partial z$ er en passende konstant. Du kan lett kontrollere at dette feltet er divergensfritt ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), slik alle magnetfelter er. Kraften blir nå

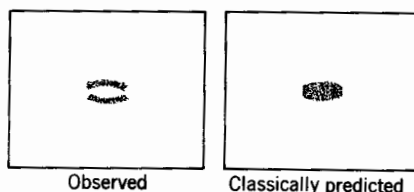
$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mu_x ax - \mu_z(B_0 + az)) = a(\mu_x \hat{e}_x - \mu_z \hat{e}_z). \quad (\text{T12.12})$$

Her må vi nå huske på at $\boldsymbol{\mu}$ preseserer hurtig omkring \mathbf{B} -feltet, dvs omkring z -aksen. x -komponenten μ_x er derfor i middel lik null, og gir ingen avbøyning i x -retningen. Vi får derfor en avbøyning i positiv eller negativ z -retning, bestemt av kraften $F_z = -a\mu_z$. Målingen av avbøyningen er derfor en måling av μ_z . (Merk at μ_z er konstant under presesjonen.)

I 1921 (før kvantemekanikken) ventet Stern og Gerlach at retningen av atomets magnetiske moment $|\boldsymbol{\mu}|$ skulle være tilfeldig fordelt ($0 < \alpha < \pi$). De ventet derfor å finne en kontinuerlig fordelt avbøyning, som skulle svare til en variasjon av μ_z mellom $-|\boldsymbol{\mu}|$ og $+|\boldsymbol{\mu}|$. Håpet var at de ved å måle den maksimale avbøyningen (for α lik null og π) skulle kunne beregne $|\boldsymbol{\mu}|$ ut fra hastigheten til strålen, atom-massen, lengden av magneten og parameteren a .

Etter 1925 har kvantemekanikken lært oss at en måling av μ_z må gi en av egenverdiene (ifølge målepostulatet). Siden retningen til $\boldsymbol{\mu}$ og dermed μ_z er kvantisert ifølge (T12.10), må vi derfor vente å finne en *kvantisert avbøyning*. Dersom den totale dreieimpulsen til atomet er heltallig (dvs gitt av et heltallig dreieimpulskvantetall l), skulle vi da vente å finne $2l + 1$ diskrete avbøyninger, altså et odde antall bilder på “skjermen” av spalten i figuren ovenfor.

Men eksperimentet viste noe annet: Stern og Gerlach (1922) brukte en oppvarmet gass av sølvatomer ($Z = 47$). Resultatet var *to* striper på skjermen.



Et tilsvarende eksperiment med hydrogenatomer, utført av Phipps og Taylor i 1927, viste også to striper.

Spinn og magnetisk moment for elektronet

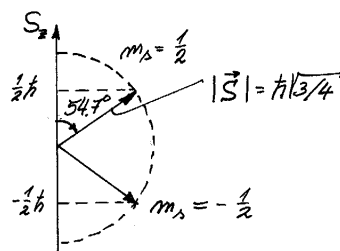
(8.3.3 i Hemmer)

Forklaringen ble funnet av Uhlenbeck og Goudsmit i 1925, og er egentlig den samme både for Ag og H, men er enklest å forstå i hydrogentilfellet: Selv med $l = 0$ har elektronet i H-atomet et magnetisk moment $\boldsymbol{\mu}_S$, som er ansvarlig for avbøyningen av banen til H-atomene. Dette magnetiske momentet er knyttet til en *indre* dreieimpuls hos elektronet, det såkalte **spinn** \mathbf{S} . Som alle dreieimpulser kan spinn karakteriseres ved et dreieimpulskvantetall, som vi kan kalle s , slik at $|\mathbf{S}| = \hbar\sqrt{s(s+1)}$, og slik at z -komponenten kan ha verdiene

$$S_z = m_s \hbar, \quad \text{der } m_s = -s, -s+1, -s+2, \dots, +s.$$

Dette er analogt med at $m = L_z/\hbar$ har verdiene $-l, -l+1, -l+2, \dots, +l$ for et gitt bandedreieimpulskvantetall l . Fra diskusjonen av generelle dreieimpulser i Tillegg 11 følger det at et spinnkvantetall generelt er nødt til å ha en av verdiene $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$. Antallet m_s -verdier er $2s+1$, analogt med de $2l+1$ verdiene av L_z .

At vi får *to* diskrete avbøyninger i Stern–Gerlach-eksperimentet må vi da tolke slik at $2s+1$ er lik 2 i dette tilfellet, dvs at spinnkvantetallet s for elektronet er lik $\frac{1}{2}$. Elektronet har altså spinn $\frac{1}{2}$, som vi sier. Dette svarer til $|\mathbf{S}| = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\sqrt{3/4} = 0.866 \hbar$. De to mulige verdiene av det magnetiske kvantetallet for spinn er da $m_s = \pm\frac{1}{2}$, som svarer til $S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$. Disse to tilstandene kalles hhvis **spinn opp** og **spinn ned**.



Eksperimenter viser at det indre magnetiske momentet knyttet til spinn er

$$\boldsymbol{\mu}_S = g_e \frac{-e}{2m_e} \mathbf{S}. \quad (\text{T12.13})$$

Her er faktorene foran \mathbf{S} produktet av det gyromagnetiske **forholdet** vi hadde for elektronets banebevegelse, og g_e som er en dimensjonsløs *faktor*. Nøyaktige målinger viser at denne er

$$g_e = 2 \times 1.001159652187 (\pm 4) \quad (\text{gyromagnetisk faktor for elektronet}), \quad (\text{T12.14})$$

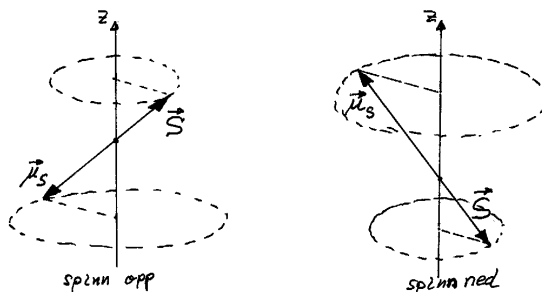
hvor usikkerheten (± 4) ligger i siste siffer.

De to diskrete avbøyningene i SG-eksperimentet skyldes altså at målingen bare kan gi to mulige verdier for μ_z , S_z og F_z :

$$m_s = +\frac{1}{2}: \quad S_z = +\frac{1}{2}\hbar, \quad (\mu_S)_z = -\frac{1}{2}g_e \frac{e\hbar}{2m_e} = -\frac{1}{2}g_e \mu_B, \quad F_z = -a\mu_z = \frac{1}{2}g_e a\mu_B,$$

$$m_s = -\frac{1}{2} : \quad S_z = -\frac{1}{2}\hbar, \quad (\mu_S)_z = +\frac{1}{2}g_e\mu_B, \quad F_z = -a\mu_z = -\frac{1}{2}g_e a\mu_B.$$

Med $a > 0$ ser vi her at den øverste stripen svarer til måleresultatet $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$ (spinn opp), mens den nederste svarer til $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ (spinn ned).¹



12.1.d Spinnene til andre partikler

(8.3 i Hemmer)

Protonet og nøytronet

Hva med protonet som utgjør *kjernen* i H-atomet — har ikke også dette spinn $\frac{1}{2}$ og et magnetisk moment? Svaret er jo, men det viser seg at det magnetiske momentet er mye mindre enn for elektronet;

$$\boldsymbol{\mu}_p = 5.59 \frac{e}{2m_p} \mathbf{S}_p \quad (g_p = 5.59). \quad (\text{T12.15})$$

Her er altså den naturlige enheten for det magnetiske momentet

$$\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.1524515 \cdot 10^{-8} \text{ eV/T(esla)} \quad (1 \text{ kjernemagneton}). \quad (\text{T12.16})$$

Vi legger merke til at den gyromagnetiske faktoren $g_p = 5.59$ for protonet avviker ganske mye fra faktoren $g_e \approx 2$ for elektronet. Dette har å gjøre med at protonet er en sammensatt partikkel, bygd opp av to u -kvarker med ladning $q = 2e/3$ og én d -kvark med $q = -e/3$. Også nøytronet er en sammensatt partikkel (én u og to d), og da er det ikke så rart at det får et magnetisk moment,

$$\boldsymbol{\mu}_n = -3.83 \frac{e}{2m_p} \mathbf{S}_p \quad (g_n = -3.83), \quad (\text{T12.17})$$

selv om det er en nøytral partikkel.

¹Med H-atomer eller sølvatomer fra en “ovn” blir det en 50/50 fordeling mellom øvre og nedre stråle; sannsynligheten for å måle spinn opp er altså like stor som for å måle spinn ned. (Dette holder også om en vrir magneten, slik at det er en annen komponent av spinn som måles.) En sier da at primærstrålen ut fra ovnen er upolarisert. Etter passasjen gjennom det inhomogene magnetfeltet kan vi derimot si at atomene som er havnet i den øvre strålen er fullstendig spinnpolarisert; de utgjør et ensemble som alle er i tilstanden “spinn opp” (og tilsvarende for den nedre strålen). En Stern–Gerlach-apparatur (karakterisert essensielt av et inhomogent magnetfelt) kan derfor brukes både til å måle spinnkomponenter og til å preparere ensembler med veldefinert spinn.

Det er et viktig poeng at μ_p og μ_n er en faktor ~ 1000 mindre enn μ_e . Atomers oppførsel i magnetfelt bestemmes derfor i hovedsak av elektronene.²

Hvorfor får vi bare to diskrete avbøyninger også for sølvatomene? Svaret ligger i at 46 av de 47 elektronene i sølvatomet befinner seg i en kvantemekanisk tilstand som svarer til at både det totale spinnet og den totale bandedreieimpulsen for disse 46 elektronene er lik null. Det ytterste elektronet (nr 47) er i en s -tilstand ($l = 0$). Dermed utgjøres det samlede magnetiske momentet for atomet av det indre magnetiske momentet til det ytterste elektronet (akkurat som for et fritt elektron). (Et eventuelt magnetisk moment til kjernen kan vi se bort fra, fordi dette uansett vil være størrelsesorden en faktor 1000 ganger mindre enn μ_S .)

Spinnene til andre partikler

Elektronet og dets antipartikkel positronet er bare to av flere såkalte **leptoner** (partikler som ikke vekselvirker sterkt) som alle har spinn $\frac{1}{2}$. Dette gjelder både myonene μ^\pm (med masse $m_\mu = 105.66 \text{ MeV}/c^2$) og τ^\pm ($m_\tau = 1777 \text{ MeV}/c^2$) som er et slags tyngre utgaver av elektronet. Slektskapet understrekes av at også g -faktoren for myonet μ^- er tilnærmet lik 2:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mu^-} = g_\mu \frac{-e}{2m_\mu} \mathbf{S}_\mu, \quad (\text{T12.18})$$

$$g_\mu = 2 \times 1.0011659160 (\pm 6) \quad (\text{gyromagnetisk faktor for myonet}). \quad (\text{T12.19})$$

Spinn $\frac{1}{2}$ finner en også hos de nesten masseløse nøytrinoene, ν_e og $\bar{\nu}_e$, samt tilsvarende par av myon-nøytino og -antinøytino (ν_μ og $\bar{\nu}_\mu$) og tau-nøytino og -antinøytino.

Fotonet kommer i en særstilling fordi spinn-komponenten langs bevegelsesretningen bare kan ha verdiene $\pm\hbar$. Dette henger sammen med at fotonet er masseløst. Beslektet med fotonet er de massive “vektor-bosonene”, W^\pm ($M_W \approx 80.4 \text{ MeV}/c^2$) og Z^0 ($M_Z \approx 91.2 \text{ MeV}/c^2$), som alle har spinn 1, og som sammen med fotonene sørger for “formidlingen” av de **elektrosvake vekselvirkningene**. Spinn 1 finner en også hos gluonet, som formidler de **sterke kreftene**. Gravitonet, bæreren av gravitasjonskraften, antas å ha spinn 2.

Alle de øvrige partiklene er **hadroner** (med sterke vekselvirkninger). Disse kan deles i to grupper. Den ene er **baryonene** ($p, n, \Lambda, \Omega^-, \dots$), som i likhet med nøytronet og protonet er tre-kvark-systemer. Siden kvarkene har spinn $\frac{1}{2}$, følger det fra reglene for “addisjon av dreieimpulser” (som vi skal komme tilbake til) at baryonene har halvtallig spinn ($1/2, 3/2$, osv). Den andre gruppen er **mesonene** ($\pi, K, \rho, \omega, \dots$) som er kvark-antikvark-systemer, og som derfor får heltallige spinn (f.eks 0 for π -mesonene og 1 for ρ -mesonene).

12.2 Formalisme for spinn $\frac{1}{2}$

(Hemmer 8.3, Griffiths 4.4, B&J 6.7–8)

²Det finnes unntak: I kjernemagnetisk resonans (NMR) er mye av poenget at koblingsleddet $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ mellom det magnetiske feltet og kjernenes magnetiske momenter er så små at de svarer til energier i radiofrekvensområdet.

Hva spinnet *ikke* er

Uhlenbeck og Goudsmit bygde sin spinnhypotese i 1925 på en klassisk forestilling om et roterende elektron, med en viss utstrekning og ladningsfordeling. Moderne spredningseksperimenter har imidlertid vist at elektronets utstrekning, om den er forskjellig fra null, må være mindre enn 10^{-18} m. Dessuten har det vist seg umulig å lage en modell med roterende masse- og ladningsfordeling som gir en beskrivelse av elektronets spinn og magnetiske moment. Vi må altså konstatere at elektronet framtrer som en punktpartikkel, og at spinnet og det magnetiske momentet (med $g_e \approx 2$) ikke kan forstås som resultatet av en “materieell” rotasjon, som vi kan forestille oss klassisk og som kan beskrives ved hjelp av en ordinær bølge ligning og bølgefunksjon. Det er forbeholdt banedreieimpulsen, som bare kan ha *heltallige* dreieimpuls-kvantetall, i motsetning til spinnet, som tydeligvis også kan være halvtallig. Merk ellers at egen spinn s til en gitt partikkeltype ikke har noe valg, i motsetning til banedreieimpulsen. Elektronet, f.eks, er *nødt* til å ha $s = \frac{1}{2}$, slik at $|\hat{\mathbf{S}}| = \hbar\sqrt{3/4}$ (dag ut og dag inn). Så også på denne måten skiller spinnet seg fra hva vi ville vente for en ordinær rotasjonsbevegelse.

12.2.a “Stigen” av ket-vektorer for spinn $\frac{1}{2}$

Selv om vi altså ikke riktig ”forstår” hva spinnet er for noe, har vi en fullt brukbar teoretisk modell i den abstrakte vektorformalismen for dreieimpulser som vi kom fram til i Tillegg 11, i den forstand at vi kan regne på prosesser der spinnet spiller en rolle, og forutsi resultatene av eksperimenter.

Utgangspunktet er (T11.38) og (T11.39), som for spinnet (med $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}}$, og med $j = s = \frac{1}{2}$) tar formen

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}^2 \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle &= \frac{3}{4} \hbar^2 \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle, \\ \hat{S}_z \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle &= \hbar m \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle; \quad m = \pm \frac{1}{2},\end{aligned}\tag{T12.20}$$

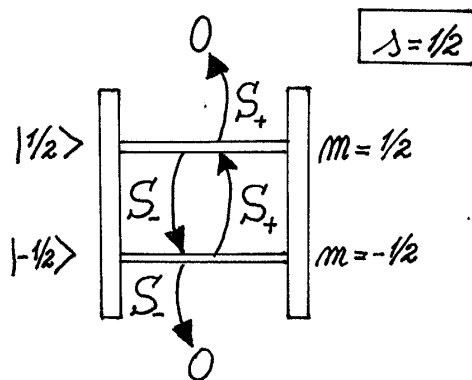
De to egenvektorene er

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \equiv \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |+\rangle \equiv |\uparrow\rangle \quad (\text{spinn opp})$$

og

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |-\rangle \equiv |\downarrow\rangle \quad (\text{spinn ned}).$$

Merk at vi kan velge merkelapper etter behov og bruke f.eks bare m eller bare fortegnet til m ; da er $s = \frac{1}{2}$ underforstått. Disse to vektorene danner en *basis* av ortogonale og normerte vektorer; de er de eneste egenvektorene til den Hermiteske operatoren \hat{S}_z . Tilstandsrommet for dette halvtallige spinnet er altså et todimensjonalt vektor-rom, og utspennes av en stige med bare to trinn:



Stigeoperatorene \hat{S}_+ og \hat{S}_- tar oss opp og ned i stigen: Ifølge (T11.52) har vi (med $j = s = \frac{1}{2}$)

$$\hat{S}_{\pm} |m\rangle = \hbar \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp m\right)\left(\frac{3}{2} \pm m\right)} |m \pm 1\rangle, \quad m = \pm \frac{1}{2},$$

eller eksplisitt:

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ |+\frac{1}{2}\rangle &= 0 ; & \hat{S}_+ |-\frac{1}{2}\rangle &= \hbar |+\frac{1}{2}\rangle ; \\ \hat{S}_- |-\frac{1}{2}\rangle &= 0 ; & \hat{S}_- |+\frac{1}{2}\rangle &= \hbar |-\frac{1}{2}\rangle . \end{aligned} \quad (\text{T12.21})$$

Fra disse formlene ser vi at

$$\hat{S}_+^2 | \pm \frac{1}{2} \rangle = 0 \quad \text{og} \quad \hat{S}_-^2 | \pm \frac{1}{2} \rangle = 0. \quad (\text{T12.22})$$

De to siste formlene er spesielle for spinn $\frac{1}{2}$ og skyldes naturligvis at vi har en "m-stige" med bare to trinn.

Merk at så lenge vi betrakter spinnet isolert, dvs ser bort fra andre frihetsgrader for partikkelen, så danner de to vektorene $|+\frac{1}{2}\rangle$ og $|-\frac{1}{2}\rangle$ et fullstendig sett; spinn-rommet er et to-dimensjonalt under-rom av Hilbert-rommet. Fullstendighetsrelasjonen for dette settet er (jf (T10.29))

$$\sum_{m=\pm\frac{1}{2}} |m\rangle\langle m| = |+\frac{1}{2}\rangle\langle +\frac{1}{2}| + |-\frac{1}{2}\rangle\langle -\frac{1}{2}| = \mathbb{1}. \quad (\text{T12.23})$$

Denne enhetsoperatoren kan vi bruke til å utvikle en vilkårlig vektor $|\chi\rangle$ i det todimensjonale spinnrommet:

$$\begin{aligned} |\chi\rangle &= \sum_m |m\rangle\langle m|\chi\rangle = \sum_m \langle m|\chi\rangle |m\rangle = \langle +\frac{1}{2}|\chi\rangle |+\frac{1}{2}\rangle + \langle -\frac{1}{2}|\chi\rangle |-\frac{1}{2}\rangle \\ &\equiv a_+ |+\frac{1}{2}\rangle + a_- |-\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Normeringskravet for vektoren $|\chi\rangle$ er

$$\langle \chi|\chi\rangle \equiv \langle \chi|\cdot|\chi\rangle = \left(a_+^* \langle +\frac{1}{2}| + a_-^* \langle -\frac{1}{2}| \right) \cdot \left(a_+ |+\frac{1}{2}\rangle + a_- |-\frac{1}{2}\rangle \right) = |a_+|^2 + |a_-|^2 = 1. \quad (\text{T12.24})$$

Merk at koeffisienten (eller projeksjonen) $a_+ = \langle +\frac{1}{2}|\chi\rangle$ er sannsynlighetsamplituden for å måle spinn opp ($S_z = \frac{1}{2}\hbar$) og etterlate spinnet i tilstanden $|+\frac{1}{2}\rangle$. Tilsvarende er $a_- = \langle -\frac{1}{2}|\chi\rangle$ amplituden for å måle spinn ned.

12.2.b Matrise-formulering. Pauli-matrisene

(8.3 i Hemmer, 6.8 i B&J)

Ket- og bra-vektorer representeres ved søyle- og rekkematriser

Det er nokså vanlig, både for spinn $\frac{1}{2}$ og høyere dreieimpulser, å lage seg en matrise-representasjon for vektorer og operatorer, med de $2j + 1$ vektorene $|j, m\rangle$ (der m går fra j til $-j$) som basis. I spinn- $\frac{1}{2}$ -tilfellet representeres da den generelle vektoren $|\chi\rangle$ av søylematrisen

$$\begin{pmatrix} \langle +\frac{1}{2} | \chi \rangle \\ \langle -\frac{1}{2} | \chi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} \equiv \chi, \quad (\text{T12.25})$$

som vi ganske enkelt betegner med χ , og som kalles en **spinor**. Basisvektoren $|+\frac{1}{2}\rangle$ representeres av søylematrisen ³

$$\begin{pmatrix} \langle +\frac{1}{2} | +\frac{1}{2} \rangle \\ \langle -\frac{1}{2} | +\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+ \quad (\text{T12.26})$$

og spinn-ned-vektoren $|-\frac{1}{2}\rangle$ representeres av

$$\begin{pmatrix} \langle +\frac{1}{2} | -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle -\frac{1}{2} | -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_- \quad (\text{T12.27})$$

Disse kalles gjerne **Pauli-spinorene**, etter Pauli, som konstruerte teorien for spinn $\frac{1}{2}$ i 1925. Vi merker oss at disse er ortonormerte,

$$\chi_{\epsilon'}^\dagger \chi_\epsilon = \delta_{\epsilon'\epsilon}.$$

Den adjungerte av ket-vektoren $|\chi\rangle = a_+|+\frac{1}{2}\rangle + a_-|-\frac{1}{2}\rangle$, som er $(|\chi\rangle)^\dagger = \langle\chi|$, representeres ved den **adjungerte matrisen** (transponert og komplekskonjugert), dvs ved rekkematrisen

$$\chi^\dagger = (a_+^* \ a_-^*).$$

Normeringsbetingelsen ovenfor kan da skrives på formen

$$\chi^\dagger \chi = (a_+^* \ a_-^*) \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = |a_+|^2 + |a_-|^2 = 1,$$

Operatorer representeres av 2×2 -matriser

Siden vi her bruker egenvektorene til $\hat{\mathbf{S}}^2$ og \hat{S}_z som basis, må disse operatorene være representert ved diagonale matriser; jf diskusjonen av matrisemekanikk i Tillegg 10 (avsnitt 10.4): Fra (T12.20) finner vi ganske riktig at

$$\langle m' | \hat{\mathbf{S}}^2 | m \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \delta_{m'm} \quad \text{og} \quad \langle m' | \hat{S}_z | m \rangle = \hbar m \delta_{m'm},$$

³Merk: I litteraturen ser en ofte at det settes likhetstegn mellom vektoren $|\chi\rangle$ og søylematrisen eller spinoren χ :

$$|\chi\rangle = \chi \equiv \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}.$$

Det første likhetsteget skal egentlig leses som: "representeres av".

eller

$$\boxed{\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \equiv \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1} \quad \text{og} \quad \boxed{S_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \equiv \frac{1}{2}\hbar\sigma_z. \quad (\text{T12.28})$$

Merk at matrise-elementene er “nummererte” etter mønsteret $\begin{pmatrix} ++ & +- \\ -+ & -- \end{pmatrix}$, og at $\mathbb{1}$ nå står for enhetsmatrisen. Merk også at diagonalelementene er identiske med egenverdiene, og dermed med de mulige resultatene ved målinger av \mathbf{S}^2 og S_z ; en måling av S_z kan bare gi $+\frac{1}{2}\hbar$ eller $-\frac{1}{2}\hbar$, uansett hvilken tilstand spinnsystemet befinner seg i, slik vi også var inne på ovenfor.

For å finne matrisene for de øvrige operatorene tar vi utgangspunkt i (T12.21), som projisert på $|+\frac{1}{2}\rangle$ og $|-\frac{1}{2}\rangle$ gir f.eks

$$(S_+)_{++} = \langle +\frac{1}{2} | \hat{S}_+ | +\frac{1}{2} \rangle = 0 \quad \text{og} \quad (S_+)_{+-} = \langle +\frac{1}{2} | \hat{S}_+ | -\frac{1}{2} \rangle = \hbar.$$

Slik finner vi at stigeoperatorene $\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$ og $\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$ representeres av matrisene

$$\boxed{S_+ = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \text{og} \quad \boxed{S_- = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}. \quad (\text{T12.29})$$

Ved å addere og subtrahere disse finner vi til slutt matrisene for \hat{S}_x og \hat{S}_y :

$$\boxed{S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \equiv \frac{1}{2}\hbar\sigma_x \quad \text{og} \quad \boxed{S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \equiv \frac{1}{2}\hbar\sigma_y. \quad (\text{T12.30})$$

Her ser vi at matrisene S_x og S_y blir ikke-diagonale, noe vi måtte vente, da \hat{S}_x , \hat{S}_y og \hat{S}_z ikke kommuterer, og vi har valgt egenvektorene til \hat{S}_z som basis. For å få litt øvelse med disse matrisene bør du nå kontrollere egenverdiligningene

$$S_z \chi_{\pm} = \pm \frac{1}{2}\hbar \chi_{\pm}, \quad (\text{T12.31})$$

som svarer til (T12.20), samt relasjonene

$$S_+ \chi_+ = 0, \quad S_+ \chi_- = \hbar \chi_+, \quad \text{osv.},$$

som er matriseutgavene av (T12.21).

En liten oppgave: Kontrollér at disse matrisene oppfyller $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$, dvs at de oppfyller dreieimpulsalgebraen.

En liten oppgave til: Vis at matrisekvadratene S_x^2 , S_y^2 og S_z^2 er like. Hva forteller resultatet om de mulige egenverdiene for S_x og S_y , og dermed om de mulige måleverdiene?

Løsning: Dersom du kvadrerer matrisene (T12.30), vil du finne at

$$S_x^2 = S_y^2 = \frac{\hbar^2}{4} \cdot \mathbb{1} = S_z^2. \quad (\text{T12.32})$$

Dette innebærer at egenverdiene til S_x og S_y er $\pm \frac{1}{2}\hbar$, akkurat som for S_z . De mulige måleresultatene for x - og y -komponentene av \mathbf{S} er altså de samme som for S_z . Dette er noe vi måtte vente, ut fra symmetribetraktninger: Vi står jo helt fritt i hvordan vi velger å orientere koordinatsystemet vårt i forhold til det fysiske systemet, og da kan det ikke være noen forskjell på de mulige måleresultatene for S_x og S_z .

Pauli-matrisene. Regneregler

For å forenkle notasjonen er det vanlig å regne med de dimensjonsløse matrisene

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{T12.33})$$

som kalles **Pauli-matrisene**. Vha disse kan matrise-representasjonen av spinnoperatoren $\hat{\mathbf{S}}$ skrives som

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}; \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \hat{\mathbf{e}}_x\sigma_x + \hat{\mathbf{e}}_y\sigma_y + \hat{\mathbf{e}}_z\sigma_z.$$

Eigenverdiligningene (T12.20) tar da formen

$$\sigma_z \chi_+ = 1 \cdot \chi_+, \quad \sigma_z \chi_- = -1 \cdot \chi_-. \quad (\text{T12.34})$$

Med tanke på framtidig bruk tar vi med noen regneregler for Pauli-matrisene. Dreieimpulsalgebraen $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ svarer til relasjonene

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad \text{osv.}, \quad (\text{T12.35})$$

som ved hjelp av Einsteins summekonvensjon ⁴ kan skrives på formen

$$\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{T12.36})$$

der den såkalte Levi-Civita-tensoren er definert ved

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{for } ijk = 123, 231, 312, \\ -1 & \text{for } ijk = 132, 321, 213, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (\text{T12.37})$$

Ved direkte regning (eller fra (T12.32)) ser du lett at

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1}. \quad (\text{T12.38})$$

⁴Vi bruker her **Einsteins summekonvensjon**: Når en latinsk indeks, f.eks. k , forekommer to ganger i et ledd, er det underforstått at leddet skal summeres over k , fra $k = 1$ til $k = 3$. Eksempel:

$$a_k b_k \equiv \sum_{k=1}^3 a_k b_k.$$

(Forekommer en indeks *mer* enn to ganger i et ledd, har vi gjort en feil).

Det er også lett å overbevise seg om at matrisene *antikommuterer*;

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0, \quad \text{osv.}$$

Jf relasjonene (T12.22) som betyr at matrisene S_x og S_y oppfyller ligningen

$$S_x^2 - S_y^2 + i(S_x S_y + S_y S_x) = 0.$$

Disse relasjonene, som kan sammenfattes i formelen

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}, \quad (\text{T12.39})$$

er spesielle for spinn $\frac{1}{2}$.

Ved å kombinere (T12.36) og (T12.39) finner vi at

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (\text{T12.40})$$

Fra denne kan vi utlede følgende relasjon, som gjelder for vilkårlige vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \sigma_i a_i \sigma_j b_j = \delta_{ij} a_i b_j \mathbb{1} + i \varepsilon_{ijk} a_i b_j \sigma_k,$$

dvs

$$\boxed{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbb{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}. \quad (\text{T12.41})$$

Spesielt har vi for $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \hat{\mathbf{n}}$ (der $\hat{\mathbf{n}}$ er en enhetsvektor):

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathbb{1} = \mathbb{1}. \quad (\text{T12.42})$$

Merk at relasjonene (T12.38) er spesialtilfeller av denne, og at den svarer til

$$(\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \cdot \mathbb{1}. \quad (\text{T12.43})$$

Denne er en generalisering av (T12.32), og måtte forventes ut fra symmetri-argumentet ovenfor; uansett hvilken komponent $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ av spinnene en velger å måle, så må resultatet bli $\frac{1}{2}\hbar$ eller $-\frac{1}{2}\hbar$.

12.2.c Spinnretningen

(B&J s 311)

På tross av at formalismen ovenfor tar utgangspunkt i abstrakte Hilbert-vektorer (som ikke har noen bølgefunksjonsrepresentasjon), kan vi bruke den til å regne ut alt som kan etterprøves eksperimentelt, dvs vi har en fullgod *teori* for spinn. Vi kan f.eks beregne forventningsverdier som $\langle S_z \rangle$ ved følgende oppskrift (som vi som vanlig kan kalle “sandwich”- eller “hamburger”-oppskriften):

$$\langle S_z \rangle_\chi = \langle \chi | \hat{S}_z | \chi \rangle = \chi^\dagger S_z \chi. \quad (\text{T12.44})$$

En liten oppgave: Vis den siste overgangen, med utgangspunkt i

$$\langle \chi | \hat{S}_z | \chi \rangle = \langle \chi | \mathbb{1} \cdot \hat{S}_z \cdot \mathbb{1} | \chi \rangle = \sum_{mn} \langle \chi | m \rangle \langle m | \hat{S}_z | n \rangle \langle n | \chi \rangle.$$

[Hint: Sett $\langle m | \chi \rangle = a_m$, slik at $\langle \chi | m \rangle = a_m^*$.]

Som et eksempel kan vi velge tilstanden $\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, som gir ⁵

$$\begin{aligned}\langle S_z \rangle &= \chi_+^\dagger S_z \chi_+ = \chi_+^\dagger \frac{1}{2} \hbar \chi_+ = \frac{1}{2} \hbar, \\ \langle S_x \rangle &= \chi_+^\dagger S_x \chi_+ = (1, 0) \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \langle S_y \rangle &= \chi_+^\dagger S_y \chi_+ = (1, 0) \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

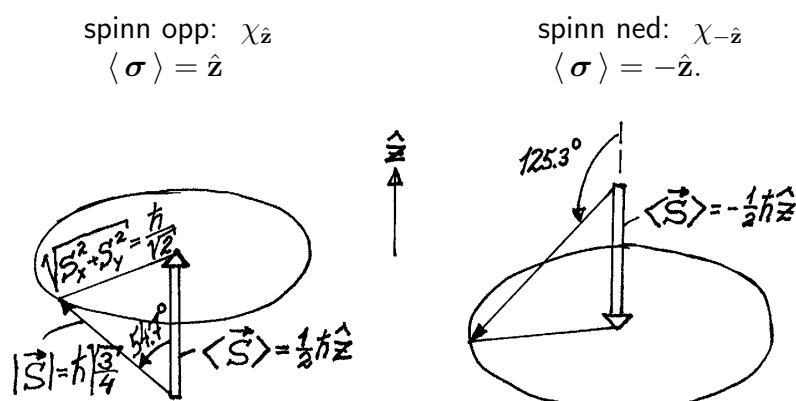
Så for tilstanden $\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ er

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \hbar \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \hbar \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Dette er grunn god nok til å kalle denne tilstanden for **spinn opp**. *Retningen* av $\langle \mathbf{S} \rangle$, som altså er $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \hat{\mathbf{e}}_z \equiv \hat{\mathbf{z}}$ i dette tilfellet, kan vi kalle **spinnretningen**. Derfor bruker vi også notasjonen

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_{\hat{\mathbf{z}}}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_{-\hat{\mathbf{z}}}, \quad (\text{T12.45})$$

der spinnretningen $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ brukes som indeks.



Disse tilstandene er illustrert i figuren, som er helt ekvivalent med den vi brukte for bane-dreieimpuls i Tillegg 5. Som for bane-dreieimpuls har dette bildet begrenset verdi. Det gir korrekt $|\mathbf{S}|$ ($= \hbar \sqrt{3/4}$) og $S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$, samt $S_x^2 + S_y^2 = \mathbf{S}^2 - S_z^2 = \frac{1}{2} \hbar^2$. Bildet kan også (til nøds) minne oss om at forventningsverdiene av S_x og S_y er lik null for begge de to tilstandene χ_{\pm} ,

$$\langle S_x \rangle = \langle S_y \rangle = 0.$$

Svakheten er at det kan få oss til å tro at *retningen* til \mathbf{S} er en observabel, og det er den jo ikke, fordi komponentene ikke er kompatible; de kan ikke ha skarpe verdier samtidig. Vinkelen $\arccos(\frac{1/2}{\sqrt{3/4}}) = 54.7^\circ$ eller 125.3° mellom \mathbf{S} og z-aksen er altså bare en annen måte å uttrykke at de to mulige verdiene for S_z er $\pm \frac{1}{2} \hbar$, sammen med den faste verdien

⁵ $\langle S_z \rangle$ blir lik $\frac{1}{2} \hbar$ fordi χ_+ er en egenspinor med skarp $S_z = \frac{1}{2} \hbar$. At $\langle S_x \rangle$ og $\langle S_y \rangle$ blir lik null er ikke så rart. Det ville være merkelig om $\langle \mathbf{S} \rangle$ skulle peke skjevt i forhold til måleretningen $\hat{\mathbf{z}}$ etter *prepareringen* av tilstanden χ_+ .

$|\mathbf{S}| = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}}$. Dette er samme type **retningskvantisering** som vi fant for banedreieimpulsen i Tillegg 5. Når vi sender spinnnet gjennom Stern–Gerlach-magneten i avsnitt 12.1.c, er det disse to tilstandene det har å *velge* mellom (uansett hvilken tilstand det er i før målingen). Dette valget bestemmer om kraften peker opp eller ned, og avgjør om partikkelen havner i øvre eller nedre stråle.

Men en SG-magnet kan også vrir. Anta at vi vrir den 90 grader, slik at det er S_x som måles istedenfor S_z . Hva slags tilstander får vi *da* for ensemblene i “øvre” og “nedre” stråle? Målepostulatet svarer at spinnnet da må velge mellom egentilstandene $\chi_{\pm\hat{x}}$ til S_x .

En liten oppgave: Sett $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ og løs egenverdioproblemet

$$S_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

der e er egenverdien(e).

Fasiten er at egenverdiene er $\pm\frac{1}{2}\hbar$ (de samme som for S_z) og at egentilstandene med spinnretningene \hat{x} og $-\hat{x}$ er hhvis

$$\chi_{\hat{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \chi_{-\hat{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{T12.46})$$

Tilsvarende er

$$\chi_{\hat{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \chi_{-\hat{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (\text{T12.47})$$

med de samme egenverdiene. I disse spinorene har vi valgt fasene slik at øvre komponent er reell og positiv.

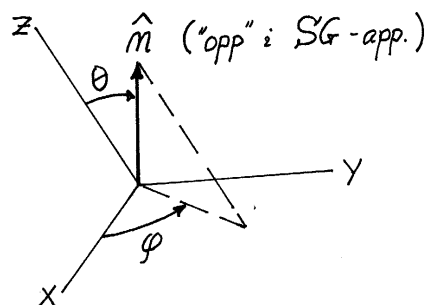
Generelle spinn- $\frac{1}{2}$ -tilstander

(Hemmer s 178, B&J s 309)

Ovenfor tenkte vi oss en fysisk rotasjon av SG-magneten og dermed av de fysiske tilstandene i de to strålene. Dette kalles en **aktiv rotasjon**. Nå skal vi i stedet tenke oss en såkalt **passiv rotasjon**, der SG-apparaturen hele tiden beholder den opprinnelige fysiske orienteringen, mens vi tenker oss at *koordinatsystemet* vrir. Det som er “opp” i apparaturen (den opprinnelige \hat{z} -retningen) blir da en enhetsvektor

$$\hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta \quad (\text{T12.48})$$

med retningsvinkler θ og ϕ i det nye koordinatsystemet:



I dette koordinatsystemet er spinnretningene for spinnene i den øvre/nedre strålen $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \pm \hat{\mathbf{n}}$; de fysiske (målbare) spinnretningene står fast i likhet med apparaturen.

Sett fra det nye koordinatsystemet foretar vi nå en måling av spinnkomponenten $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. De to mulige måleresultatene og de fysiske tilstandene er selvsagt uendret, men *matriserepresentasjonene* av disse tilstandene endres, fordi det nye koordinatsystemet svarer til en ny basis; Pauli-spinorene

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

svarer til spinn opp og spinn ned i forhold til den nye $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen.

Disse matriserepresentasjonene, som svarer til spinn opp og spinn ned i forhold til $\hat{\mathbf{n}}$ -retningen, bestemmes av egenverdiligningene

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \chi_{\pm \hat{\mathbf{n}}} = \pm \frac{1}{2} \hbar \chi_{\pm \hat{\mathbf{n}}} \iff \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \chi_{\pm \hat{\mathbf{n}}} = \pm \chi_{\pm \hat{\mathbf{n}}}. \quad (\text{T12.49})$$

Vi kan nøye oss med å løse egenverdiligningen $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \chi_{\hat{\mathbf{n}}} = \chi_{\hat{\mathbf{n}}}$. Vi setter $\chi_{\hat{\mathbf{n}}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Denne spinoren skal oppfylle egenverdiligningen

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbb{1}) \chi_{\hat{\mathbf{n}}} &= (\sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z - \mathbb{1}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (\text{T12.50})$$

Som du lett kan sjekke er både nedre og øvre komponent i denne ligningen oppfylt for

$$(\cos \theta - 1)a + \sin \theta e^{-i\phi} b = 0,$$

dvs for

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\phi} = \frac{\sin \frac{1}{2}\theta e^{i\phi}}{\cos \frac{1}{2}\theta}. \quad (\text{T12.51})$$

Dette komplekse forholdstallet mellom nedre og øvre komponent er faktisk alt vi trenger å vite om spinoren. Riktignok inneholder de to komplekse tallene a og b fire reelle parametre, men normeringsbetingelsen $|a|^2 + |b|^2 = 1$ reduserer antallet til tre, og én parameter kan vi la være fri, idet vi trekker den ut i form av en felles fasefaktor, som er uten fysisk betydning. Eksplisitt har vi fra normeringsbetingelsen:

$$\frac{1}{|a|^2} = 1 + \left| \frac{b}{a} \right|^2 = 1 + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta},$$

dvs

$$a = e^{i\alpha} \cos \frac{1}{2}\theta,$$

der fasen α er fritt valgbar. Dermed blir

$$b = a \cdot \frac{b}{a} = e^{i\alpha} \sin \frac{1}{2}\theta e^{i\phi},$$

slik at

$$\chi_{\hat{\mathbf{n}}} = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta \\ \sin \frac{1}{2}\theta e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{T12.52})$$

der den valgbare fasen α er uten fysisk betydning.

En liten oppgave: Vis at den andre tilstanden $\chi_{-\hat{\mathbf{n}}}$ (med *spinn ned* i forhold til retningen $\hat{\mathbf{n}}$) kan skrives som

$$\chi_{-\hat{\mathbf{n}}} = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{2}\theta \\ -\cos \frac{1}{2}\theta e^{i\phi} \end{pmatrix} = e^{i\alpha'} \begin{pmatrix} -\sin \frac{1}{2}\theta e^{-i\phi} \\ \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{T12.53})$$

Det er flere måter å gå fram på: Du kan (i) skifte fortegn på egenverdien i (T12.49) og (T12.50) og gjenta prosessen ovenfor, eller (ii) bruke at $\chi_{-\hat{\mathbf{n}}}$ må være ortogonal på $\chi_{\hat{\mathbf{n}}}$. En tredje metode er (iii) å merke seg at denne tilstanden har *spinn opp* i forhold til retningen $\hat{\mathbf{n}}' = -\hat{\mathbf{n}}$, som svarer til vinklene $\theta' = \pi - \theta$ og $\phi' = \phi + \pi$.

Noen flere oppgaver:

a) Vis at for en generell normert spinor $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= \chi^\dagger \chi = \Re(2a^*b), \\ \langle \sigma_y \rangle &= \Im(2a^*b), \\ \langle \sigma_z \rangle &= |a|^2 - |b|^2, \end{aligned} \quad (\text{T12.54})$$

slik at spinnretningen er

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_\chi = \hat{\mathbf{x}} \Re(2a^*b) + \hat{\mathbf{y}} \Im(2a^*b) + \hat{\mathbf{z}} (|a|^2 - |b|^2). \quad (\text{T12.55})$$

b) Vis at lengden av den reelle vektoren $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ er lik 1. [Hint: $[\Re(a^*b)]^2 + [\Im(a^*b)]^2 = |a^*b|^2 = |a|^2|b|^2$.]

c) Vis at *retningen* til $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_\chi$ bestemmes av det komplekse forholdet b/c . [Hint: Sett utenfor en faktor $|a|^2 = a^*a$.]

d) Kontrollér at $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \hat{\mathbf{n}}$ for tilstanden $\chi_{\hat{\mathbf{n}}}$, ved å sette inn a og b fra (T12.52).

e) Finn $\langle \mathbf{S} \rangle$ for tilstanden $\chi_{\hat{\mathbf{y}}}$ ved hjelp av formelen (T12.54).

Som en konklusjon på diskusjonene ovenfor kan vi slå fast at en vilkårlig spinor $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ svarer til en veldefinert spinnretning $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, og at χ er en egenpinor til $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ -komponenten av \mathbf{S} :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \mathbf{S} \chi = \frac{1}{2} \hbar \chi.$$

Merk at både $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ og χ er entydig bestemt av det komplekse forholdet b/a (modulo en fasefaktor for χ).

12.2.d Presesjon i homogent magnetfelt

(8.3.5 i Hemmer, 4.3 i Griffiths)

Et *homogent* magnetfelt $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$ vil ikke splitte en partikkelstråle slik Stern–Gerlach-magneten gjør, men det vil likevel påvirke spinttilstanden, via vekselvirkningsleddet $-\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}$. Dersom vi ser bort fra elektronets banebevegelse og neglisjerer alle andre vekselvirkninger, dvs betrakter spinnnet isolert, så reduserer Hamilton-operatoren seg til dette koblingsleddet:

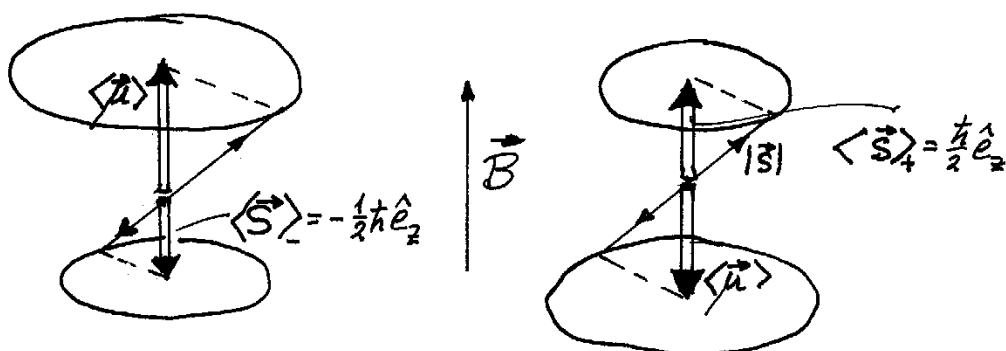
$$\hat{H} = -\mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}} = -\mathbf{B} \cdot \left(\frac{-g_e e}{2m_e} \mathbf{S} \right) \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} = \omega S_z, \quad (\text{T12.56})$$

der

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{g_e e B}{2m_e} \hat{e}_z.$$

Vi starter med å merke oss at siden Hamilton-operatoren er proporsjonal med S_z , så blir egenfunksjonene $\chi_{\pm\hat{z}}$ til S_z nå energiegentilstander, med energiene

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \hbar \omega.$$



grunntilstanden $\chi_{-\hat{z}}$

1. eksiterte tilstand $\chi_{\hat{z}}$

Tilstanden $\chi_{-\hat{z}}$ har $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle$ parallell med \mathbf{B} -feltet, og er derfor grunntilstanden, med energien $E_- = -\frac{1}{2} \hbar \omega$. Første (og eneste) eksiterte tilstand har spinn opp og derfor $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle$ antiparallell med \mathbf{B} -feltet.

Til disse to energiegentilstandene svarer det to stasjonære tilstander,

$$\chi_{\pm}(t) = e^{-iE_{\pm}t/\hbar} \chi_{\pm\hat{z}} = e^{\mp i\omega t/2} \chi_{\pm\hat{z}}. \quad (\text{T12.57})$$

I disse stasjonære tilstandene skjer det ingen ting, så $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle$ vil være parallell eller antiparallell med \mathbf{B} -feltet hele tiden.

Ser vi derimot på superposisjonen

$$\chi(t) = a_0 \chi_+(t) + b_0 \chi_-(t) = \begin{pmatrix} a_0 e^{-i\omega t/2} \\ b_0 e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (\text{T12.58})$$

så er dette en ikke-stasjonær tilstand der saker og ting vil skje. Om vi for enkelhets skyld velger $a_0^* b_0$ reell, blir

$$a^* b = a_0^* b_0 e^{i\omega t}.$$

Innsetting i (T12.55) gir da

$$\langle \mathbf{S} \rangle_x = \frac{1}{2} \hbar \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \hbar \left[\hat{\mathbf{e}}_x (2a_0^* b_0) \cos \omega t + \hat{\mathbf{e}}_y (2a_0^* b_0) \sin \omega t + \hat{\mathbf{e}}_z (|a_0|^2 - |b_0|^2) \right]. \quad (\text{T12.59})$$

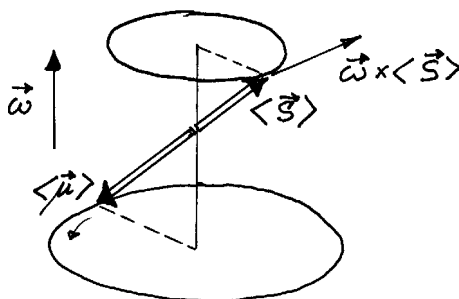
Her ser vi at $\langle S_z \rangle$ er konstant (uavhengig av t), mens

$$\frac{d}{dt} \langle S_x \rangle = -\omega \langle S_y \rangle \quad \text{og} \quad \frac{d}{dt} \langle S_y \rangle = \omega \langle S_x \rangle. \quad (\text{T12.60})$$

Dette viser at $\langle \mathbf{S} \rangle$ (og dermed også $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle$) preseserer omkring z -aksen med vinkelfrekvensen ω :

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{S} \rangle = \boldsymbol{\omega} \times \langle \mathbf{S} \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \boldsymbol{\omega} \times \langle \boldsymbol{\mu} \rangle. \quad (\text{T12.61})$$

Merk at dette er helt analogt med den klassiske presesjonen vi fant for det magnetiske momentet side 3 [se ligning (T12.6)].



En liten utfordring: Bruk formelen (4.19) i Hemmer for tidsutviklingen av forventningsverdier,

$$\frac{d}{dt} \langle F \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\widehat{H}, \widehat{F}] \rangle,$$

til å vise formlene (T12.60).