

KAP. 1 : FUNDAMENTALE PRINSIPPER

Hastighetsvektor: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Lineær impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

Total kraft: $\vec{F}$ (gravitasjon, elektrodynamisk etc.)

Newtons 2. lov: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; gjelder i inertialsystem

Hvis konstant masse m : $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

Når Newtons 2. lov gjelder, har vi et inertialsystem (= Galileisk system)

Bevaringslov for lineær impuls: Hvis $\vec{F} = 0$, er $\vec{p}$ bevart

Dreieimpuls omkring origo: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Kraftmoment ———: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{\vec{L}}) - \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times m\vec{v} = 0}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Bevaringslov for dreieimpuls: Hvis $\vec{N} = 0$, er $\vec{L}$ bevart

Arbeid utført av ytre kraft $\vec{F}$ når partikkelen går fra

1 til 2: $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$



Anta $m = \text{konstant}$: $\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} v^2 dt$

$$\Rightarrow W_{12} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \equiv T_2 - T_1$$

(= endring i kinetisk energi)

Konservativt system: W_{12} den samme for alle veier $1 \rightarrow 2$

Kan uttrykkes slik: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ (utelukker friksjon; vil alltid gi positiv $\vec{F} \cdot d\vec{s}$)

$$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla V(\vec{r}) \quad ; \quad V = \text{potensial (potensiell energi)}$$

Nullnivået for V er vilkårlig

$$\left. \begin{array}{l} \text{For konservativt system: } W_{12} = V_1 - V_2 \\ \text{Fra før: } W_{12} = T_2 - T_1 \end{array} \right\} T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Dvs: For konservativt system er total partikkelenergi $T+V$ bevart

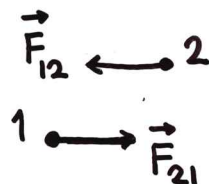
1-2: Systemer med flere partikler

$$\text{Newtons 2. lov for partikkel } i: \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} = \dot{\vec{p}}_i$$

$\vec{F}_i^{(e)}$: ytre kraft

$\vec{F}_{ji}$: indre kraft på partikkel i pga. partikkel j ($\vec{F}_{ii} = 0$)

Antar at $\vec{F}_{ij}$ oppfyller Newtons 3. lov: Kraftene to partikler utøver på hverandre er like store og motsatt rettet



("svak lov om aksjon og reaksjon")

Summerer over alle partikler i :

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(e)}}_{\text{total ytre kraft}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji}}_{=0}$$

Definerer massesentrets posisjon $\vec{R}$, (= CM, "center of mass")

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \quad \text{og får:}$$

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)} \quad \text{dvs: CM beveger seg som om all masse var konsentrert i CM}$$

$$\text{Total impuls: } \vec{P} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Bevaringslov for total impuls til et system av partikler: Hvis $\vec{F}^{(e)} = 0$, er $\vec{P}$ bevart. (Krever svak lov om aksjon/reaksjon.)

$$\text{Total dreieimpuls: } \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \quad (\text{da } \sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \frac{\vec{p}_i}{m_i} \times \vec{p}_i = 0)$$

Innsetting av Newtons 2. lov, $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji}$, gir

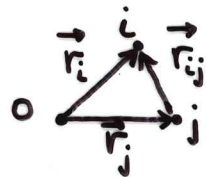
$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}$$

Siste ledd kan skrives som sum over par av formen

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} \quad \text{fordi } \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Med $\vec{r}_i - \vec{r}_j \equiv \vec{r}_{ij}$ kan vi skrive

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji}$$

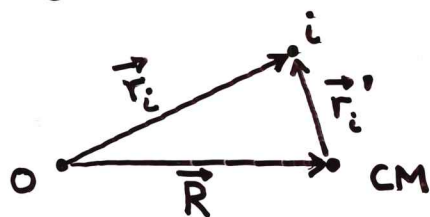


Hvis indre kraft mellom i og j ligger langs forbindelseslinjen ("sterk lov om aksjon og reaksjon"), vil alle $\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)}; \quad \vec{N}^{(e)} = \text{ytre dreiemoment}$$

Bevaringslov for total dreieimpuls til et system av partikler: Hvis $\vec{N}^{(e)} = 0$, er $\vec{L}$ bevart. (Sentrale krefter forutsatt.)

Omskriving av $\vec{L}$:



$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$$

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_i'$$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i') \times m_i (\vec{v} + \vec{v}_i') \\ &= \sum_i \vec{R} \times m_i \vec{v} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i' \right)}_{=0} \times \vec{v} + \vec{R} \times \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i'}_{=0}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{R} \times M \vec{v} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$$

Dvs: Dreieimpulsen om O er lik dreieimpulsen av systemet konsentrert i CM pluss dreieimpulsen omkring CM .

Dersom $\vec{R}$ ligger fast i forhold til O ($\vec{v} = 0$), er $\vec{L}$ lik dreieimpulsen omkring CM og uavhengig av referansepunkt.

Energi:

Arbeid utført når systemet flyttes fra 1 til 2:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i$$

La oss se på "venstre" side, med $\vec{F}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i$ og $d\vec{s}_i = \vec{v}_i dt$:

(Omforming av høyre side ikke pensum; Goldstein s. 10-11)

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = T_2 - T_1 \quad (\text{som før!})$$

$$\text{der } T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

Kan igjen dele opp i "CM-del" og "indre del" :

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v} + \vec{v}_i')$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \vec{v} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i'}_{=0}$$

$$\Rightarrow \underline{T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2}$$

1-3: Føring

Eksempler:



Klassifisering:

Holonome føring: $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0$

Eks: Fast legeme, $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$

Ikke-holonome føring: ikke mulig å formulere som $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0$

Eks:  $r^2 - a^2 \geq 0$

The diagram shows a particle on a circular arc of radius 'a'. The arc is part of a larger circle, and the particle is constrained to move along the arc.

Videre klassifisering:

Rheonome føring er tidsavhengige

Skleronome ————— tidsuavhengige

Generaliserte koordinater:

N partikler har $3N$ uavhengige koordinater, evt. $3N$ frihetsgrader

Med k holonome føringsbetingelser fås $3N-k$ frihetsgrader

Introducerer nye uavhengige koordinater $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ slik at

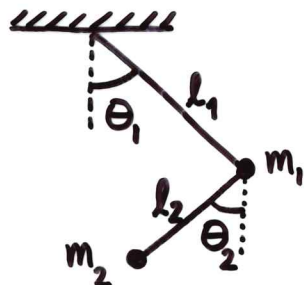
$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$

$$\vdots$$

$$\vec{r}_N = \vec{r}_N(\text{---} \parallel \text{---})$$

Føringsbetingelsene er implisitt inneholdt i disse transformasjonsligningene.

Eks: Dobbeltpendel; bevegelse i ett plan



Generaliserte koord. er θ_1, θ_2 .

To partikler $\Rightarrow$ i utgangspunktet 6 frihetsgrader

Bevegelse i ett plan gir én føringsbet. pr partikkel

Konstante stavelengder l_1 og l_2 gir ytterligere to føringsbet.

$$\Rightarrow \# \text{ frihetsgrader} = 6 - 4 = 2$$

1-4 : D'Alemberts prinsipp og Lagranges ligninger

Virtuell forskyvning : en infinitesimal forskyvning av systemets koordinater, $\delta \vec{r}_i$, i overensstemmelse med evt. føringsbetingelser. Krefter og føringsbet. endres ikke.

Anta først system i likevekt : alle $\vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

Spalt opp $\vec{F}_i$ i påtrykt kraft $\vec{F}_i^{(a)}$ og føringskraft $\vec{f}_i$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Anta $\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ (Friksjon utelates)

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \text{"Prinsippet om virtuelt arbeid"}$$

Merk at generelt er $\vec{F}_i^{(a)} \neq 0$ siden $\delta \vec{r}_i$ generelt ikke alle er uavhengige (pga. føringsbet.)

Ser så på system i bevegelse : $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$

Analogt med det statiske tilfellet ; $-\dot{\vec{p}}_i = \text{"effektiv motkraft"}$

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad ; \quad \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i}_{\text{antas} = 0} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \text{D'Alemberts prinsipp}$$

Har oppnådd å eliminere føringskreftene ; dropper heretter (a)

Antar holonomt system og innfører uavhengige koordinater q_i :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_i \equiv \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \vec{v}_i(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Den virtuelle forskyningen: $\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ [δt ikke involvert her; virtuell forskyvn. vedrører bare koordinatforskyvn. δq_j]

Ser på 1. ledd i "D'Alemberts prinsipp":

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j$$

$$\text{Generalisert kraft: } Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$[Q_j \delta q_j] = [\text{arbeid}]$$

Deretter 2. ledd:

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\text{Her er } \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right\}$$

Kan bytte om $\frac{d}{dt}$ og $\frac{\partial}{\partial q_j}$ i siste ledd:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d \vec{r}_i}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$\text{Ser også at } \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{Innsetting gir da:}$$

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Dermed kan vi skrive D'Alemberts prinsipp slik:

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

Holonomie føringsbet. $\Rightarrow \delta q_j$ uavhengige $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (n \text{ 2.ordens ligninger})$$

Kalles ofte Lagranges ligninger, men vanligst å bruke betegnelsen for konservativt system: $\vec{F}_i = -\nabla_i V$ Det gir:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

$V = V(q_i)$, ikke avh. av generaliserte hastigheter $\dot{q}_i$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}$$

Def. Lagrangefunksjonen $L = T - V$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Lagranges ligninger

Holonomt, konservativt system forutsatt.

Merk: L er ikke entydig; $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt}$
gir samme bevegelsesligninger som L

Kommentar:

Startet med ønske om å eliminere føringskreftene fra bev.lign.

Har oppnådd dette. I tillegg har vi endt opp med enklere

ligninger som kun involverer skalare funksjoner, T og V , i

motsetning til utgangspunktet som involverte vektorer,
 $\vec{F}_i$ og $\vec{a}_i$

1-5: Generaliserte (hastighetsavhengige) potensialer

Lagranges ligninger på uforandret form dersom

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}, \quad L = T - U$$

Generalisert potensial: $U = U(q_j, \dot{q}_j)$

Viktig eksempel: Elektromagnetisk potensial

Maxwells ligninger (SI-enheter):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Lorentzkraft: $\vec{F} = q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$ kan skrive $\vec{B}$ som "curl" til en vektor: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\text{Dermed: } \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Kan da skrive: $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$; ϕ = skalar funksjon

$\Rightarrow$ Lorentzkraften uttrykt ved ϕ og $\vec{A}$:

$$\vec{F} = q \left[-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \nabla \times \vec{A} \right]$$

Passende sted å innføre Levi-Civita tensoren samt litt annen hensiktsmessig notasjon!

Levi-Civita tensoren ϵ_{ijk}

Antar kartesiske koordinater.

Summekonvensjon: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \partial_i A_i = A_{i,i}$$

$$\nabla \phi = \vec{e}_i \partial_i \phi$$

>: skal summere over gjentatte indekser

ϵ_{ijk} : antisymmetrisk i alle indekser, skifter fortegn når to indekser bytter plass, er lik null når minst to indekser er like

$$\epsilon_{ijk} = +1 \quad \text{når } i, j, k \text{ syklisk} \quad (\epsilon_{123} = 1)$$

$$\epsilon_{ijk} = -1 \quad \text{antisyklisk} \quad (\epsilon_{132} = -1)$$

$$\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C} : A_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} : B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} A_{k,j}$$

Har dessuten:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

Eks:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \times \vec{B})_i (\vec{C} \times \vec{D})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \epsilon_{ilm} C_l D_m = \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m = \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$

Tilbake til det elektromagnetiske potensialet!

$$\text{Vi hadde } \vec{F} = q \left[-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \nabla \times \vec{A} \right]$$

Ved å bruke $[\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})]_i = v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i$ har vi:

$$F_i = q \left\{ -\partial_i \phi - \partial_t A_i + v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i \right\}$$

$$\text{Bruker videre: } v_j \partial_i A_j = \partial_i \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \partial_j A_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_i &= q \left\{ -\partial_i \phi + \partial_i \vec{v} \cdot \vec{A} - \frac{dA_i}{dt} \right\} \\ &= q \left\{ -\partial_i [\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} (\vec{A} \cdot \vec{v}) \right\} \\ &= -\partial_i U + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_i} \end{aligned}$$

$$\text{der } U = q\phi - q\vec{A} \cdot \vec{v} = U(\vec{r}, \vec{v}) = U(x_i, v_i)$$

$$[\text{NB: } \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} \underbrace{[q\phi - q\vec{A} \cdot \vec{v}]}_{\Rightarrow 0} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} q\vec{A} \cdot \vec{v}]$$

Har da Lagrangefunksjonen for ladet partikkel i e.m. felt:

$$L = T - U = T - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v}$$

$$(T = \frac{1}{2}mv^2)$$

Friksjonskrefter

Lagranges lign. kan alltid skrives på formen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (\text{holonomt system forutsatt})$$

der L inneholder potensialet fra konservative krefter, mens Q_i er kreftene som ikke kan avledes fra et potensial.

Typisk eksempel: friksjonskrefter. Som regel er friksjonskraften F_f prop. med hastigheten v til en partikkel.

$$F_{fx} = -k_x v_x, \text{ ert. } F_{fx} = -\frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{1}{2} k_x v_x^2 \right)$$

$$\text{I 3 dimensjoner: } \vec{F}_f = -\nabla_v \mathcal{F}$$

$$\text{Rayleighs dissipasjonsfunksjon: } \mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2)$$

Arbeid utført av systemet mot friksjon:

$$dW_f = -\vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_f \cdot \vec{v} dt = -(k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt$$

$\Rightarrow 2\mathcal{F}$ er raten for energitap pga. friksjon

Generalisert friksjonskraft:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_{if} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_i \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_i \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\text{Lagranges lign. blir nå: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Må altså kjenne to skalare funksjoner, L og $\mathcal{F}$, for at dette skal gi beregelsesligningene.

1-b: Eksempler på bruk av Lagrangeformalismen

①a) Én partikkel, kartesiske koordinater

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\text{Beregelseslign: } \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z, \quad Q_i = F_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = F_z$$

∴ vi er tilbake til Newtons 2. Lov !

①b) Én partikkel, plane polarkoordinater

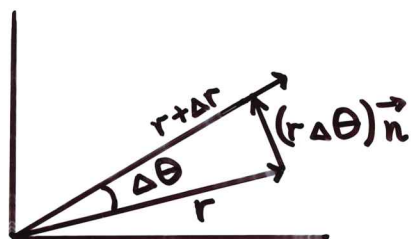
$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \{q_i\} = \{r, \theta\}$$

$$\text{Hastigheter: } \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\text{Kinetisk energi: } T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Kan også sees av geometrien:



$$\text{Radiell hastighet: } \frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$\text{Asimutal ---: } \frac{r \Delta \theta}{\Delta t} \rightarrow r \frac{d\theta}{dt} = r \dot{\theta}$$

Generaliserte kraftkomponenter: $Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot \hat{r} = F_r$$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot r \hat{n} = r F_\theta$$

To gen. koord. $\Rightarrow$ To Lagranges ligninger

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m \dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r}$$

$$\Rightarrow m \ddot{r} - \underbrace{m r \dot{\theta}^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{sentripetalakselerasjon}}} = F_r \quad (q_1 = r)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta}$$

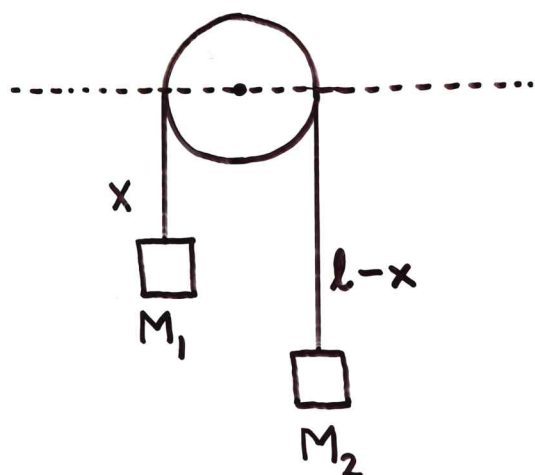
$$\Rightarrow m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} = r F_\theta \quad (q_2 = \theta)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = r p_\theta = r m v_\theta = r m r \dot{\theta} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow N = r F_\theta$$

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = r F_\theta \quad \hat{=} \quad \frac{dL}{dt} = N$$

② Atwoods maskin



Bare én uavhengig koord: x

Potensiell energi: $V = -M_1 g x - M_2 g (l-x)$

Kinetisk ———: $T = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \dot{x}^2$

$$L = T - V = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g (l-x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2) g \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2) \dot{x}$$

$$\Rightarrow (M_1 + M_2) \ddot{x} = (M_1 - M_2) g$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g, \quad \text{som en vel kunne se direkte}$$

Merk at føringskrefter, her strekket i snora, ikke forekommer i den Lagrangske formuleringen. Kan da heller ikke bestemme snorstrekket direkte ved bruk av Lagranges metode.

KAP. 2: VARIASJONSPRINSIPPER OG LAGRANGES LIGNINGER

2-1: Hamiltons prinsipp

Har utledet Lagranges lign. fra et "differensielt" prinsipp, ved å se på små virtuelle forskyninger fra en gitt tilstand.

Kan også utlede Lagranges lign. fra et "integral"-prinsipp (evt. globalt prinsipp), ved å se på små variasjoner i hele beregelsen mellom tider t_1 og t_2 .

Presisering av utsagnet "systemets bevegelse mellom t_1 og t_2 ":

Konfigurasjonsrommet dannes av aksene til de n gen. koord. $q_1, \dots, q_n$ ($n=3N-k$). Posisjonen / Tilstanden til hele systemet er ved gitt tid t gitt ved ett punkt i konfig.rommet. "Systemets bevegelse" er beskrevet ved en kurve i konfig.rommet, der hvert punkt på kurven representerer hele systemets konfigurasjon ved et bestemt tidspunkt.

Hamiltons prinsipp: Systemet beveger seg fra t_1 til t_2 slik at

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (= \text{virkning / virkningsintegral})$$

har et ekstremum (stasjonær verdi) for den virkelige veien.

$$L = T - V = L(q, \dot{q}, t)$$

Konservativt system hvis $V = V(q)$

Hamiltons prinsipp gjelder også mer generelt: $V \rightarrow U = U(q, \dot{q}, t)$

Slike systemer kalles monogeniske.



(x, y) fikserte ved t_1 og t_2
 t er parameter for banen i
 konfig. rommet

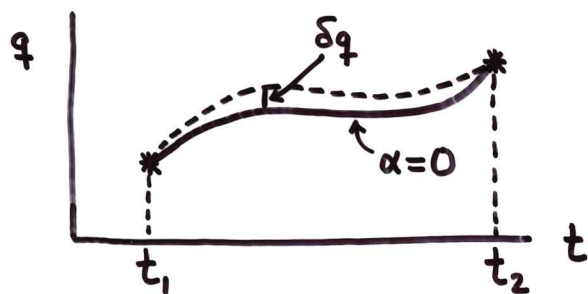
Hamiltons prinsipp kan uttrykkes slik:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0$$

Vi skal se at Lagranges ligninger følger av Hamiltons prinsipp.

2-3: Lagranges ligninger fra Hamiltons prinsipp

Anta først én frihetsgrad, $q = q(t)$



De forskjellige kurvene
 parametriseres ved en parameter
 α , slik at $\alpha=0$ tilsvarer
 ekstremum av I .

$$\Rightarrow q(t, \alpha) = q(t, 0) + \alpha \eta(t)$$

$$\eta(t) \text{ vilkårlig, men slik at } \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$$

Virkingen:

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t] dt$$

Virtuelle variasjoner for fast t :

$$\delta q = \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha$$

$$\delta \dot{q} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha$$

Variasjon av I :

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt$$

Kan bytte om på δ og d/dt i siste ledd:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{q} &= \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha \partial t} d\alpha \\ \frac{d}{dt} \delta q &= \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \alpha} d\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt \end{aligned}$$

Skal ha $\delta I = 0$, og ettersom δq er vilkårlig, følger

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Generalisering til mange frihetsgrader, $i=1, \dots, n$, gir

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i=1, \dots, n \quad \text{Lagranges ligninger}$$

Krever varh. gen. koord. q_i , altså holonome færingar.

Gjelder for konservative systemer, $V=V(q_i)$, og for

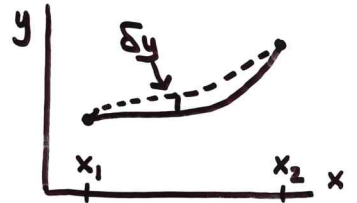
ikke-konservative systemer når $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$, $L=T-U$.

2-2: Variasjonsregning

Anta kurve $y = y(x)$ mellom $y_1 = y(x_1)$ og $y_2 = y(x_2)$, og la $y' = \frac{dy}{dx}$. (Boka bruker $\dot{y}$; vi reserverer $\dot{y}$ for dy/dt)

Skal finne ekstremalverdi av integralet

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$$



der $f(y, y', x)$ er en funksjon definert på kurven $y(x)$. Skal altså finne kurven $y(x)$ som gir $\delta I = 0$. Samme type regning

som i kap. 2-3:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0$$

Som før kan vi bytte om δ og $\frac{d}{dx}$ i siste ledd: $\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y$

$$\Rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right] dx$$

(delvis integrasjon)

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y dx$$

= 0 (ingen variasjon av y i endepunktene)

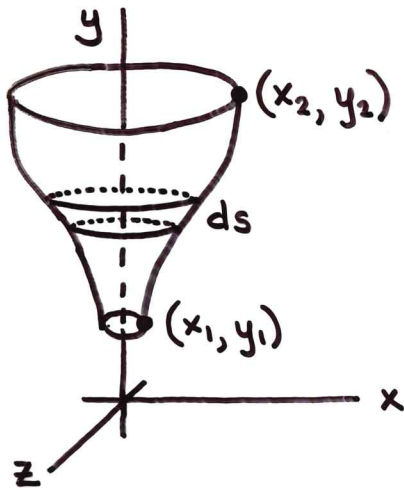
$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0$$

Siden δy er vilkårlig får vi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Eulers ligninger

(evt. Euler-Lagrange diff. lign.)

Eks: Minimum omdreiningsflate

Kurve mellom to fikserte punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) dreier om y -aksen.
Skal finne den kurven $y(x)$ som gir minimum areal av omdreiningsflaten.

$$\text{Areal av stripe } ds : 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\Rightarrow A = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$= 2 \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx \quad \text{med } f(y, y', x) = x \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad (\text{Eulers ligning})$$

Løsning:

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a = \text{konst.} ; \quad x^2 y'^2 = a^2 (1 + y'^2) ;$$

$$y'^2 (x^2 - a^2) = a^2 ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\Rightarrow y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a \operatorname{ar} \cosh \frac{x}{a} + b$$

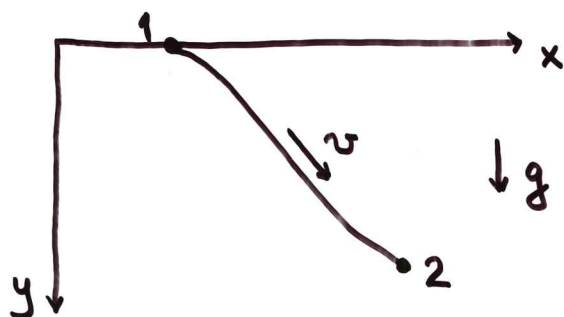
$$(x = a \cosh t \Rightarrow y = a \int \frac{\sinh t}{\sinh t} dt = at + b = a \operatorname{ar} \cosh \frac{x}{a} + b)$$

Alternativt

$$x = a \cosh \frac{y-b}{a}$$

Betingelsene $y(x_1) = y_1$ og $y(x_2) = y_2$ fastlegger int. konstantene a og b .

Eks: Brachistochrone problemet



Finn den kurven mellom to punkter 1 og 2 som er slik at tilbakelagt tid for en partikkel blir minimal.
(Anta null utgangshastighet.)

Altså: $t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$ skal være et minimum.

Energibevarelse: $\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

$$\Rightarrow t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 f(y, y', x) dx \quad \text{med } f(y, y', x) = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

Ser på 2. ledd:

$$\frac{y''}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{2y^{3/2}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}}$$

Ta med 1. ledd og sett $y^{-1/2}(1+y'^2)^{-1/2}$ utenfor:

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \left\{ \frac{1+y'^2}{2y} + y'' - \frac{y'^2}{2y} - \frac{y'^2 y''}{1+y'^2} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2y} + \frac{y''(1+y'^2) - y'^2 y''}{1+y'^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2y} + \frac{y''}{1+y'^2} = 0 \quad | \cdot y'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{2y} + \frac{y' y''}{1+y'^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\ln y)' + \frac{1}{2} [\ln(1+y'^2)]' = 0$$

$$\Rightarrow \{ \ln [y(1+y'^2)] \}' = 0$$

$$\Rightarrow \ln [y(1+y'^2)] = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow y(1+y'^2) = \text{konst.} \equiv 2k$$

Parameterframstilling:

$$x = k(\theta - \sin \theta) \quad y = k(1 - \cos \theta)$$

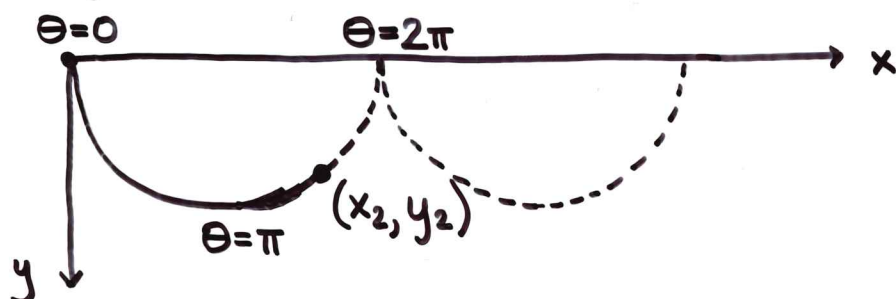
$$\frac{dy}{dx} = \frac{k \sin \theta d\theta}{k(1 - \cos \theta) d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\Rightarrow 1+y'^2 = \frac{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

$$\Rightarrow y(1+y'^2) = k(1 - \cos \theta) \cdot \frac{2}{1 - \cos \theta} = 2k$$

så vi ser at parameterframstillingen stemmer!

Hvis partikkelen begynner i origo med null utgangshastighet:



2-4: Hamiltons prinsipp for ikke-holonome systemer

Har til nå forutsatt holonome føringer: $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$

Kunne da, med j holonome føringer, innføre $n = 3N - j$ generaliserte koordinater q_k som alle er uavhengige. Hamiltons prinsipp,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0,$$

ledet fram til

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0, \quad (1)$$

som med uavhengige δq_k gar oss Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k=1, 2, \dots, n$$

For ikke-holonome systemer er ikke alle δq_k uavhengige.

Her forutsetter vi at ikke-holonome føringer kan skrives:

$$(*) \quad \sum_{k=1}^n a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0 \quad l=1, 2, \dots, m$$

Koeffisientene a_{lk} og a_{lt} kan generelt avhenge av q og t .

Kan nå ikke konstruere varierte baner med forskyvninger som oppfyller føringsbetingelsene $(*)$ (bevises ikke her!).

Kan derimot konstruere variert bane fra virkelig bane ved virtuelle forskyvninger δq_k , som da må oppfylle

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0 \quad \left[\text{Husk: } \delta t \text{ ikke involvert; virtuelle forskyvn. ved fast } t \right]$$

25. Bruker nå "Lagranges metode med ubestemte koeffisienter".

Har m lign. som hver ganges med en koeffisient λ_l :

$$\lambda_l \sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0 \quad ; \quad \lambda_l = \lambda_l(q, t) \text{ generelt}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 dt \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \lambda_l a_{lk} \delta q_k = 0 \quad (2)$$

Antar videre at Hamiltons prinsipp også gjelder for ikke-holonome systemer. Kan da kombinere (2) over med (1) s. 24:

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0$$

Her er ikke alle δq_k uavh. $\Rightarrow$ kan ikke sette $(\dots) = 0$ for alle k .

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & & | & | & & | \\ 1 & 2 & \dots & n-m & n-m+1 & \dots & n \\ \hline & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{uavh.}} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ikke uavh., bundet av } \sum_{k=1}^n a_{lk} \delta q_k = 0} & & & \end{array} \quad k$$

Men vi har λ_l til vår disposisjon! Velger dem slik at

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0 \quad ; \quad k = n-m+1, \dots, n$$

Står da igjen med

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0$$

Her er alle δq_k uavh. $\Rightarrow$ kan sette $(\dots) = 0$ for $k=1, 2, \dots, n-m$

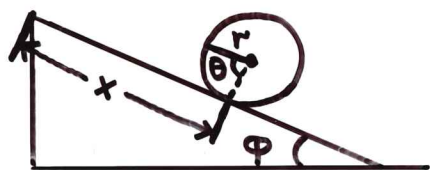
Dermed:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0 \quad ; \quad k=1, 2, \dots, n$$

Har nå $n+m$ ukjente, $q_1, \dots, q_n$ og $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Har også $n+m$ lign., n Lagrangelign. og m føringsligninger (* s. 24):

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0 \quad ; \quad l=1, 2, \dots, m$$

Eks: Ring som ruller på et skråplan



To gen. koord: x, θ

En føringsbet: $r d\theta = dx$ (rullebet.)

Anta at ringen ligger i ro på toppen ved $x = 0$.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = Mg(l-x) \sin \varphi \quad (l = \text{planets lengde})$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 - Mg(l-x) \sin \varphi$$

En føringsbet. $\Rightarrow$ én "føringsligning":

$$\sum_{k=1}^2 a_k \dot{q}_k + a_t = a_x \dot{x} + a_\theta \dot{\theta} + a_t = 0$$

Sammenligning med $r d\theta = dx$, altså $\dot{x} - r \dot{\theta} = 0$, gir ^①

$$a_x = 1, \quad a_\theta = -r, \quad a_t = 0$$

Fra Lagranges lign., $\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda a_k = 0$, får vi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= Mg \sin \varphi, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \ddot{x}, \quad \lambda a_x = \lambda \\ \Rightarrow Mg \sin \varphi - M \ddot{x} + \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} q_1 = x \quad \text{②}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M r^2 \ddot{\theta}, \quad \lambda a_\theta = -r \lambda \\ \Rightarrow -M r \ddot{\theta} - \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} q_2 = \theta \quad \text{③}$$

Har 3 ukjente, x, θ og λ , og 3 ligninger, ①, ② og ③.

Ta $\frac{d}{dt}$ på begge sider av $r\dot{\theta} = \dot{x} \Rightarrow r\ddot{\theta} = \ddot{x}$, som
innsatt i ③ gir $M\ddot{x} = -\lambda$, som innsatt i ② gir

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} g \sin\varphi, \quad \lambda = -\frac{1}{2} Mg \sin\varphi$$

og $\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{r} = \frac{g}{2r} \sin\varphi$

- Ved friksjonsløs glidning ned skråplanet er selvsagt akselerasjonen $\ddot{x}$ lik $g \sin\varphi$, så $\ddot{x}$ er altså halvparten så stor ved rulling som ved glidning. ($V \rightarrow T_{\text{trans.}} + T_{\text{rot.}}$)
- Da $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} g \sin\varphi$ fås

$$\int_0^{v_0} v dv = \frac{1}{2} g \sin\varphi \int_0^l dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} gl \sin\varphi$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{gl \sin\varphi} \quad \text{ved bunnen av planet}$$
- Kan skrive $-\lambda = Mr\ddot{\theta}$, og vi innser at $-\lambda = \frac{1}{2} Mg \sin\varphi$ er føringskraften som gjør at ringen begynner å rotere
- Fortegnet på λ er her vilkårlig; i boka er valgt $a_\theta = r$ og $a_x = -1$, som gir $\lambda = \frac{1}{2} Mg \sin\varphi$. Men fysikken blir selvsagt den samme!
- Merk at vi her har brukt metoden på et eksempel med holonome føringer; kan være hensiktsmessig også da!

2-5: Fordeler med variasjonsprinsipp

- Prinsippet er mest nyttig når man kan finne en Lagrange-funksjon L uttrykt ved uavhengige koordinater, altså for holonome systemer
- Metoden involverer kun T og V , som er fysiske størrelser uavhengig av koordinatvalg. Hele formuleringen er dermed automatisk invariant mhp. valg av koordinater.
- Fra før hadde vi at L er ubestemt mhp. addisjon av dF/dt der $F = F(q, t)$. Med Hamiltons prinsipp som basis er dette innlysende:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta F(t_2) - \delta F(t_1) = 0$$

fordi det ikke er noen variasjon i endepunktene.

- Kan anvende metoden i mange grener av fysikken.

Eks:
$$L = \frac{1}{2} \sum_j L_j \dot{q}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_j \frac{q_j^2}{2C_j} + \sum_j E_j(t) q_j$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_j R_j \dot{q}_j^2 \quad (\text{dissipasjonsfunksjon})$$

Lagranges ligninger blir:

$$L_j \ddot{q}_j + \sum_{k \neq j} M_{jk} \ddot{q}_k + R_j \dot{q}_j + q_j/C_j = E_j(t)$$

Kan beskrive: 1) system av elektriske kretser koblet via gjensidige induktanser M_{jk} ($q \hat{=}$ elektrisk ladning).

2) system av masser og fjærer som beveger seg i viskøst medium ($q \hat{=}$ posisjoner).

2-6: Bevarelsesetninger og symmetriegenskaper

Med n frihetsgrader vil bevegelseslign. være n diff.lign. som er av 2.orden i tida. Løsning innebærer 2 integrasjoner pr. lign.
 $\Rightarrow$ ialt $2n$ integrasjonskonst. som kan bestemmes fra initialbetingelsene, dvs, startverdier for $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$

Ofte ikke interessert i fullstendig løsning $q_j(t)$, $j=1 \dots n$.
 Viktigere å kunne beskrive systemets bevegelse generelt (bevegelsens "natur") i form av bevaringslover og symmetriegenskaper.

— . —

Anta system av punktmasser i potensial V som kun er avhengig av posisjonene.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i = p_{ix}$$

Med generaliserte koord. q_i definerer vi den generaliserte, evt. kanoniske, evt. konjugerte impulsen som

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Hvis potensialet er hastighetsavhengig, vil kanonisk impuls være forskjellig fra mekanisk impuls.

Eks: Partikler i elektromagnetisk felt

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_i q_i \phi(\vec{r}_i) + \sum_i q_i \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad (\text{se s.12})$$

$$\Rightarrow p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + q_i A_x \neq m_i \dot{x}_i$$

Har en syklisk ("ignorerbar") koordinat q_i dersom L ikke inneholder q_i . Dermed er $\partial L / \partial q_i = 0$, og Lagranges

lign. blir
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i = 0$$

Altså: $p_i = \text{konstant}$ når q_i er syklisk

∴ Kanonisk impuls tilhørende syklisk koordinat er bevart

Eks: E.m. felt med Φ og $\vec{A}$ uavhengig av x .

Da er L også uavh. av $x \Rightarrow x$ er syklisk koordinat

$$\Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x = \text{konst.}$$

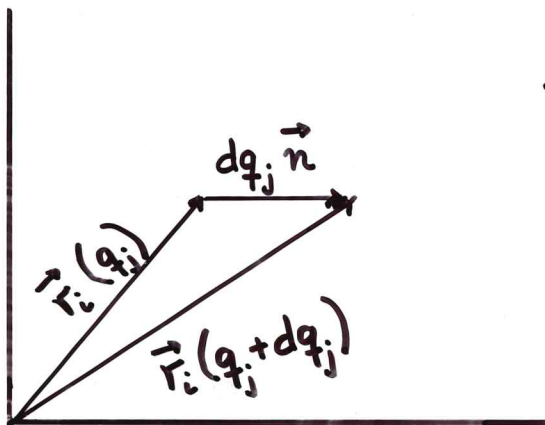
mens mekanisk impuls $m\dot{x}$ ikke er bevart.

— . —

Skal nå se nærmere på bevaringslover i forb. med translasjon og rotasjon, samt bevaring av energi.

Translasjon

Ser på en gen.koord. q_j som er slik at dq_j betyr translasjon av hele systemet i en retning $\vec{n}$



$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_i(q_j + dq_j) - \vec{r}_i(q_j)}{dq_j} \\ &= \frac{dq_j \vec{n}}{dq_j} = \vec{n} \quad (\text{for alle } i) \end{aligned}$$

Anta konservativt system, $V = V(q)$.

Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ (gjelder generelt for holonomt system; se s.9)

Hastigheter, og dermed T , upåvirket av å flytte origo $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$

$$\Rightarrow \dot{p}_j = Q_j \stackrel{(s.8)}{=} \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{F},$$

m.a.o: Q_j = komponenten av total kraft $\vec{F}$ langs $\vec{n}$

Da $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$ fås $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$

Fra s. 8: $\partial \dot{\vec{r}}_i / \partial \dot{q}_j = \partial \vec{r}_i / \partial q_j$

$$\Rightarrow p_j = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{P},$$

m.a.o: p_j er komponenten av total lineær impuls $\vec{P}$ langs $\vec{n}$

Altså: $\dot{p}_j = Q_j$ er bevægelseslign. for total lineær impuls

Hvis nå q_j er syklisk, vil $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j = 0 \Rightarrow \dot{p}_j = 0$

Dvs: Bevaringslov for lineær impuls, som funnet før.

Rotasjon

Ser på en gen. koord. q_j som er slik at dq_j betyr rotasjon av hele systemet omkring en akse $\vec{n}$

Med samme argumenter som over får vi igjen

$$\dot{p}_j = Q_j \quad \text{med} \quad Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Bevarelse av energi:

Anta at vi har $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ og $V = V(q_i)$. Ser på $\frac{dL}{dt}$:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Energifunksjonen: $H(q, \dot{q}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Anta $L = L(q_i, \dot{q}_i)$, dvs $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Dermed: $\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0$

For homogen funksjon av n'te grad gjelder Eulers teorem:

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f$$

T er homogen av 2. grad: $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i m_i \dot{q}_i = 2T$

(Da syst. er konservativt, er $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$)

$$\Rightarrow H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V = \text{total energi}$$

Altså: hvis $\partial L / \partial t = 0$ er den totale energien bevart

KAP. 8: HAMILTONS LIGNINGER

- Lagranges ligninger er ekvivalente med Hamiltons ligninger; derfor ingen ny fysikk involvert - kun en ny metode
- Hamiltons metoder ikke bedre enn Lagrangeformalismen med tanke på direkte løsning av mekanikkproblemer
- Hamiltons prosedyre mer velegnet på andre områder av fysikken, f.eks. innen kvantemekanikk og stat. mek.
- Antar nå holonome systemer og monogeniske krefter, dvs $V = V(q)$, evt. $U = U(q, \dot{q})$ slik at $Q_i = -\partial U / \partial q_i + \frac{d}{dt} \partial U / \partial \dot{q}_i$ (jfr. e.m. felt)

8-1: Legendretransformasjoner og Hamiltons bev. lign.

Lagrangeformuleringen:

Med n frihetsgrader: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$

Har n 2.ordens diff. ligninger; fullstendig løsning krever $2n$ initialbet., f.eks. verdier for $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ ved en tid t_1 , evt. verdier for $q_1, \dots, q_n$ ved to tider t_1 og t_2 .

Systemets tilstand spesifiseres ved et punkt i det n -dimensjonale konfigurasjonsrommet med akser q_i .

Hamiltonformuleringen:

Ligninger av 1. orden. Fremdeles $2n$ initialbetingelser
 $\Rightarrow$ må ha $2n$ 1.ordens ligninger og $2n$ uavhengige variable

Systemets tilstand spesifiseres ved et punkt i det
 $2n$ -dimensjonale faserommet med akser q_i og p_i ,
 der

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Størrelsene q, p kalles kanoniske variable.

— . —

Matematisk innebærer overgangen fra Lagrange- til
 Hamiltonformulering at vi endrer variable i våre funksjoner,
 fra $(q, \dot{q}, t)$ til (q, p, t) , med $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$.

Til dette trenger vi Legendretransformasjonen!

Generelt om Legendretransf.:

Anta at vi har en funksjon $f(x, y)$ slik at

$$df = u dx + v dy \quad ; \quad u = \partial f / \partial x, \quad v = \partial f / \partial y$$

Ønsker å forandre basis fra (x, y) til (u, y) slik at
 differensialer uttrykkes ved du og dy . Definer

$$g = f - ux$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dg &= df - u dx - x du = u dx + v dy - u dx - x du \\ &= v dy - x du \quad ; \quad \text{på ønsket form!} \end{aligned}$$

x og v er nå funksjoner av u og y :

$$x = -\partial g / \partial u, \quad v = \partial g / \partial y$$

Legendretransf. brukes mye i termodynamikken.

Eks: Entalpien H er funksjon av entropien S og trykket p : [i boka brukes X istedetfor H]

$$\frac{\partial H}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = V$$

$$\Rightarrow dH = TdS + Vdp$$

$H = H(S, p)$ nyttig for isentropiske og isobariske prosesser.

Dersom en ønsker å beskrive isoterme og isobariske prosesser, trenger en heller en funksjon av T og p .

Legendretransf.: $G = H - TS$

$$\Rightarrow dG = dH - TdS - SdT$$

$$= TdS + Vdp - TdS - SdT$$

$$= Vdp - SdT$$

$$\therefore \frac{\partial G}{\partial p} = V, \quad -\frac{\partial G}{\partial T} = S$$

G er Gibbs fri energi

— . —

“Naturlig” Legendretransformasjon for endring av variable fra $(q, \dot{q}, t)$ til (q, p, t) :

$$H = p\dot{q} - L$$

Hamiltonfunksjonen: $H = H(q, p, t) = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$

Differensierer (med summekonvensjon: summer over gjentatte indekser): $dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$

Fra definisjonen øverst får vi:

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Ettersom $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, forsvinner de to leddene med $d\dot{q}_i$. Videre har vi fra Lagranges lign. at

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i$$

Dermed:

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

og vi kan skrive ned Hamiltons kanoniske ligninger:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2n \text{ 1.ordens ligninger})$$

I tillegg har vi

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

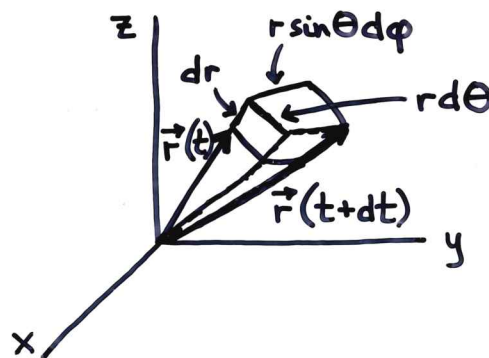
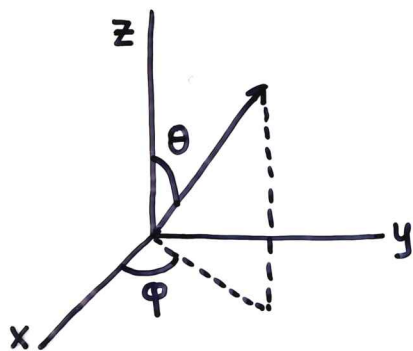
Vanlig prosedyre i Hamiltonformalismen:

1. Konstruer $L = L(q, \dot{q}, t)$
2. Definer kanoniske impulser $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
3. Konstruer $H = p_i \dot{q}_i - L$; her er H funksjon av $q, \dot{q}, p$ og t
4. Benytt $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ til å finne $\dot{q}_i$ som funksjon av (q, p, t)
5. Eliminer deretter $\dot{q}_i$ fra H slik at $H = H(q, p, t)$

Deretter kan H benyttes til å løse de kanoniske beregelseslign.

Eks 1: Partikkel i sentralt kraftfelt

Bruker kulekoordinater; $q_i = (r, \theta, \varphi)$. $V = V(r)$



$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad L = T - V$$

Bruker $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ til å eliminere $\dot{q}_i$ fra H :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow H = p_i \dot{q}_i - T + V$$

$$= m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2 + m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + V(r)$$

$$= T + V$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{p_r^2}{m^2} + \frac{1}{2} m r^2 \sin^2 \theta \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4 \sin^4 \theta} + \frac{1}{2} m r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} + V(r)$$

$$= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r)$$

$$= H(q, p)$$

Altså: Har vist at $H = \text{total energi } T + V$, og vi har greid å uttrykke H som funksjon av de kanoniske variable $(q, p) = (r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$.

Eks 2: Partikkel i elektromagnetisk felt.

Ikke konservativt system; $L = T - U$, hvor $U = q\phi - q\vec{A} \cdot \vec{v}$

Potensialene ϕ og $\vec{A}$ avhenger av $\vec{r}$ og t .

Husker fra tidligere at $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ er oppfylt med denne U .

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} = L(x_i, \dot{x}_i, t)$$

Anta kartesiske koordinater (samt summekonvensjon!):

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + qA_i\dot{x}_i - q\phi$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H = p_i\dot{x}_i - L &= (m\dot{x}_i + qA_i)\dot{x}_i - \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i - qA_i\dot{x}_i + q\phi \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + q\phi \end{aligned}$$

= mekanisk energi + potensiell energi

Uttrykker $\dot{x}_i$ ved p_i : $\dot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(x_i, p_i, t) &= \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\phi \\ &= \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi \end{aligned}$$

der avhengigheten av x_i og t ligger i $\vec{A}$ og ϕ .

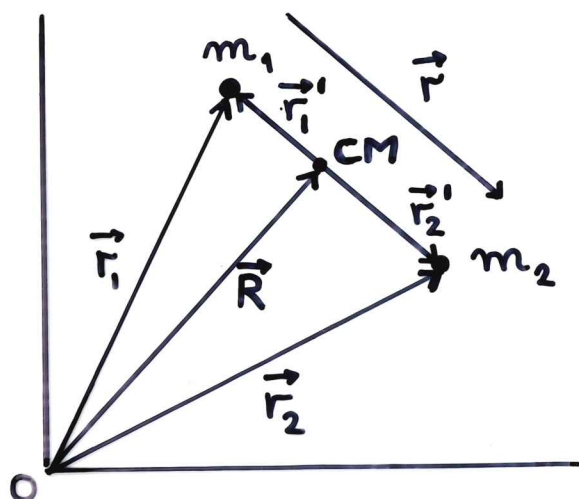
Hvis nå $(\vec{A}, \phi)$ er uavhengige av t , blir $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$,
og dermed

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

KAP. 3: TOLEGEMEPROBLEMET ; SENTRALE KREFTER

40.

3-1: Reduksjon til et ekvivalent ettlegemeproblem



To Legemer $\Rightarrow$ 6 frihetsgrader
 $\Rightarrow$ 6 uavh. generaliserte koord.

Velger $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ og

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Anta konservativt system og sentrale krefter

$$\Rightarrow V = V(r), \quad r = |\vec{r}|$$

Lagrangefunksjonen:

$$L = T(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) - V(r)$$

Kinetisk energi: (se s. 5)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_2')^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2'^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{(m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2')}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + T' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 m_2 \dot{\vec{r}}^2 \frac{(m_2 + m_1)}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 \end{aligned}$$

Innfører reduisert masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ($\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$) 41.

Dessuten: $M = m_1 + m_2$

Dermed: $T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + T' = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r) = L(r, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}})$$

Ser at $\vec{R}$ er syklisk koordinat (dvs: L uavh. av $\vec{R}$)

$\Rightarrow \dot{\vec{R}}$ er konstant (egentlig: $p_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = M \dot{\vec{R}} = \text{konst.}$)

Kan rett og slett droppe leddet $\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$, og vi har redusert tolegeme problemet til et ekvivalent ettlegeme problem:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

3-2: Beregelsesligningene

Vi kan altså betrakte en masse m i et sentralt kraftfelt.

Da systemet er rotasjonssymmetrisk, må total dreieimpuls være bevart:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{konstant (både i størrelse og retning)}$$

Kan bare være oppfylt dersom $\vec{r}$ hele tiden ligger i et plan $\perp \vec{L}$. (Sentralberegelse altså alltid i et plan.)

Virker nå rimelig å velge polarkoordinater slik at polaraksen er parallell med $\vec{L}$

$$\Rightarrow \varphi = \pi/2 = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \text{står igjen med plane polarkoordinater } (r, \theta)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) \quad [\text{Eks. 1b, s. 14}]^{42.}$$

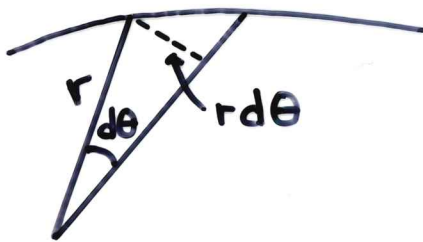
$$= L(r, \dot{r}, \dot{\theta})$$

$\because \theta$ er syklisk koordinat $\because p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$ er bevart
Den ene beregelseslign. blir altså:

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = 0$$

$$mr^2 \dot{\theta} = l = \text{dreieimpulsens størrelse}$$

Vi kan nå umiddelbart bevise Keplers 2. lov, som sier at radien sveiper over like store arealer i løpet av like store tidsrom.



$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta$$

$$\Rightarrow \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2m} p_\theta = \text{konst.}$$

Formulert for planetbevegelse, $V \sim 1/r$, men gyldig for vilkårlig sentralbevegelse.

Bereg.lign. nr. to er Lagranges lign. for koordinaten r :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} (mr\dot{r})}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}} - \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{-\frac{\partial L}{\partial r}} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$\text{Kraft i } \vec{r}\text{-retning: } f(r) \equiv -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = f(r)$$

Eliminerer $\dot{\theta}$ via $m r^2 \dot{\theta} = l \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{l}{m r^2} \quad (1)$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} = f(r) \quad ; \quad 2.\text{ordens diff.lign. bare for } r$$

Med konservativt system har vi, i tillegg til l , at total energi E er en beregelseskonstant:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) \quad (2)$$

[Kan finnes ved direkte integrasjon av beregelseslign.; se Goldstein s.74]

Vi har to variable, r og θ , og i utgangspunktet to 2.ordens diff.lign. $\Rightarrow$ må foreta 4 integrasjoner for å finne $r(t)$ og $\theta(t)$. Har allerede gjort 2 integrasjoner, der int.konst. ble fastlagt ved hjelp av l og E . Det gjenstår å utføre 2 integrasjoner for å løse de to 1.ordens ligningene. La oss starte med (2), omskrevet v.h.j.a. (1):

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 m r^2} + V = E$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V - l^2 / 2 m r^2)}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V - l^2 / 2 m r^2)}}$$

La $r(t=0) = r_0 = \text{minimum radius}$. Dermed er $dr > 0$ når $dt > 0$, og valget av $+\sqrt{\dots}$ for dr/dt er OK. Løsningen blir:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V - l^2 / 2 m r^2)}} = t(r; E, l, r_0)$$

som kan inverteres, slik at vi finner $r(t)$.

Med kjent $r(t)$ finner vi $\theta(t)$ av $mr^2\dot{\theta} = l$:

$$d\theta = \frac{l dt}{mr^2} ; \theta(t) = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0 ; \theta_0 = \theta(t=0)$$

Altså 4 integrasjonskonstanter: E, l, r_0, θ_0 .

I klassisk mekanikk kunne vi alternativt ha valgt f.eks. $r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0$ for å bestemme integrasjonskonstantene.

Men i f.eks. kvantemekanikk er initialverdier av r og θ , evt. $\dot{r}$ og $\dot{\theta}$, "uten mening" (i hvert fall alle fire samtidig; jfr. Heisenbergs uskarphetsrelasjoner!), mens E og l fremdeles har god mening. Derfor fornuftig å velge E og l hvis man ønsker å diskutere overgangen mellom klassisk mek. og kvantemek.

3-3: Ekvivalent endimensjonalt problem

Som regel ikke mulig å løse integralene for t og θ analytisk. Men innsikt kan oppnås uten fullstendig løsning, ved å benytte en endimensjonal analogi:

Vi hadde følgende beregelsesligninger:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) \quad \left(= -\frac{\partial V}{\partial r} \right) ; \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

Innsatt for $\dot{\theta}$ får vi: $m\ddot{r} = f'(r) = f(r) + l^2/mr^3$

∴ Newtons 2. lov for et endim. problem der en masse m påvirkes av en kraft $f' = f + l^2/mr^3$

Tilleggsleddet er: $\frac{l^2}{mr^3} = \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mr^3} = mr\dot{\theta}^2 = mv_{\theta}^2/r$ 45.

$\therefore$ sentrifugalkraften

Alternativt kan vi betrakte energien:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + V(r) \quad (\dot{\theta} = l/mr^2)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

$\therefore$ som et endim. problem med potensiell energi

$$V'(r) = V(r) + l^2/2mr^2$$

Kraft avledet av V' : $f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f + l^2/mr^3$,
som stemmer med f' fra forrige side.

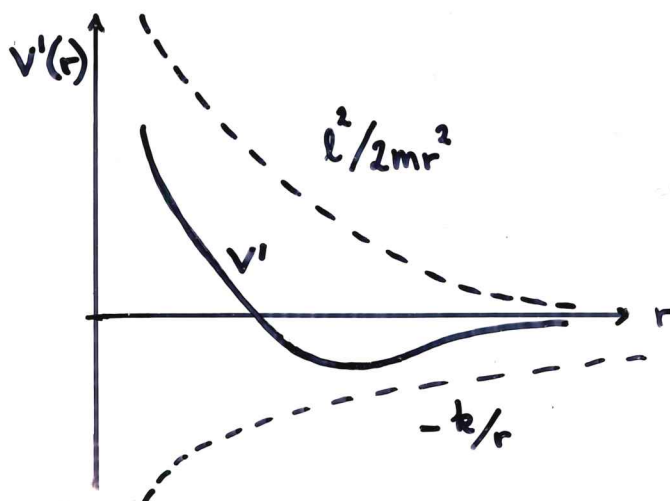
Eks: Attraktiv $\frac{1}{r^2}$ -kraft

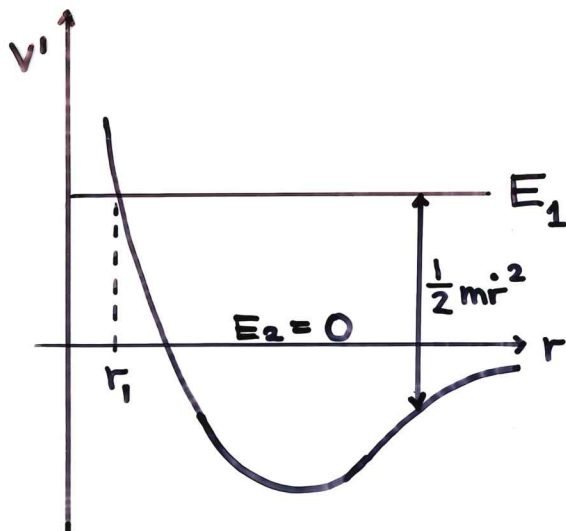
$$f(r) = -k/r^2 \quad \therefore V(r) = -k/r$$

$$\Rightarrow V'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad \leftarrow \text{sentrifugalbarrieren}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V'(r) \geq V'(r)$$

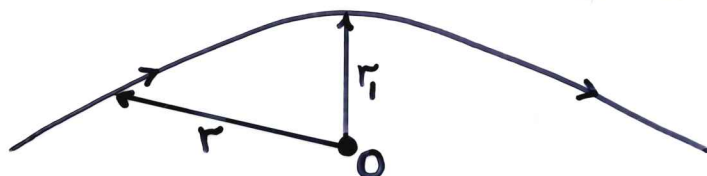
La oss plote $V'(r)$; $\lim_{r \rightarrow 0} V'(r) = +\infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} V'(r) = -0$





Hvis total energi er $E_1 > 0$:
 Partikkelen kan ikke komme nærmere enn r_1 (da $E \geq V'$).
 Ingen øvre grense for $r \Rightarrow$ beregelsen er ikke bundet.
 Vendepunkt ved $r = r_1$.

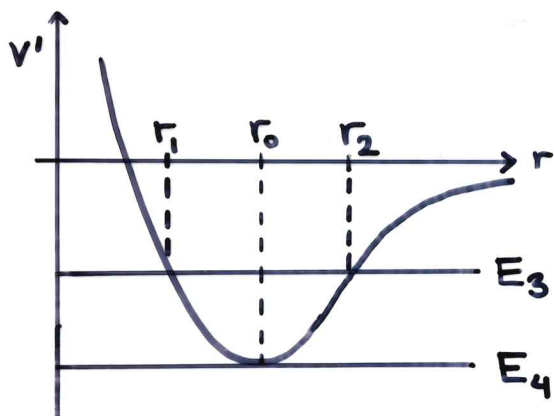
Skisse av partikkelbanen:



(Hyperbel)

Når $E = E_2 = 0$ får vi kvalitativt samme type beregelse.
 (Parabel)

Hva med energier $E < 0$?

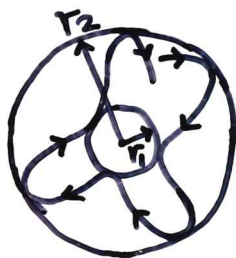


Beregelsen er nå bundet:

$$r_1 \leq r \leq r_2$$

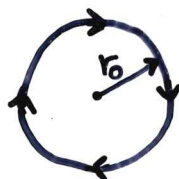
To vendepunkter, r_1 og r_2

$E = E_3$:



(ikke nødvendigvis lukket bane)

$E = E_4$:



$$r_1 = r_2 = r_0$$

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow \text{sirke}$$

Min.punkt for V'

$$\Rightarrow f' = -\partial V' / \partial r = 0$$

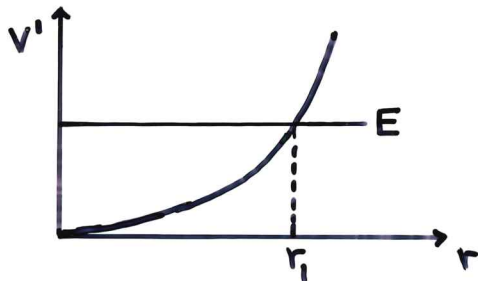
$$\Rightarrow f = -mr\dot{\theta}^2$$

Dvs: ytre kraft f balanserer akkurat sentripetalkraften

Eks: Harmonisk oscillator

$$f(r) = -kr, \quad V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

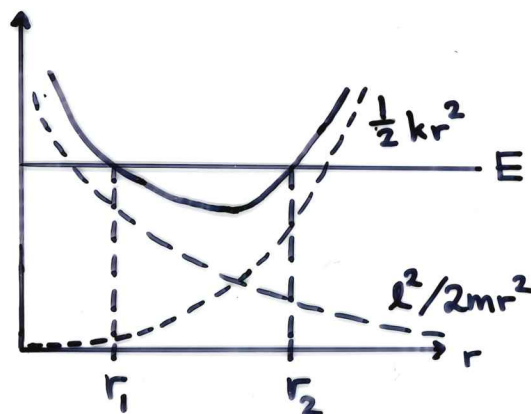
$l=0$: Ingen dreieimpuls, $\vec{r} \parallel \vec{v}$, bevegelse langs rett linje



$$V' = V$$

Bundet, harmonisk bevegelse; $r \leq r_1$

$l \neq 0$:



$$V' = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$$

Bundet bevegelse,
 $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\vec{f} = -k\vec{r} \Rightarrow f_x = -kx, \quad f_y = -ky$$

$\therefore$ to harmoniske oscillatorer som danner en vinkel på 90° med hverandre; samme frekvens

$\Rightarrow$ elliptisk bane

Eksempler: Sfærisk pendel.

Lissajoufigurer på oscilloskopet.

3-4: Virialteoremet

Generelt teorem, gyldig for mange ulike fysiske systemer.
 Av statistisk natur: Har å gjøre med tidsmiddelet av ulike størrelser.

Anta system med massepunkter i posisjoner $\vec{r}_i$, påvirket av krefter $\vec{F}_i$ (inkl. evt. føringskrefter).

Beregelsesligningene (Newtons 2. lov): $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$

Danner $G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i + \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$1. \text{ ledd: } \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T$$

$$2. \text{ ledd: } \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

Dermed:

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

Midler denne ligningen over et tidsintervall τ :

$$\overline{\frac{dG}{dt}} \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = 2\overline{T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}$$

$$\Rightarrow 2\overline{T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)]$$

For periodisk beregelse med $\tau = \text{perioden}$: H.S. = 0

For ikke-periodisk beregelse med endelige $\vec{r}_i$ og $\vec{p}_i$ så G er begrenset:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{H.S.} = 0$$

I begge tilfeller får vi:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}$$

Virialteoremet

Eks.1: Ideell gass



Volum V , N atomer

Ekvipartisjonsprinsippet $\Rightarrow \overline{T} = \frac{3}{2} NkT$

$\vec{F}_i$ er veggkraften: $d\vec{F}_i = -p \vec{n} dA$ ($p = \text{trykhet}$)

(ideell gass $\Rightarrow$ interatomære krefter kan neglisjeres)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} = -\frac{1}{2} p \int \vec{n} \cdot \vec{r} dA = -\frac{1}{2} p \underbrace{\int \nabla \cdot \vec{r} dV}_3 = -\frac{3}{2} pV$$

$$\Rightarrow pV = NkT \quad \text{Boyles lov}$$

Eks.2: $\vec{F}_i = -\nabla_i V$

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \nabla_i V \cdot \vec{r}_i}$$

Anta en partikkel i sentralfelt: $\overline{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} r}$

Anta videre $V = ar^{n+1}$ (dvs $f \sim r^n$). Da blir

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V$$

$$\Rightarrow \overline{T} = \frac{n+1}{2} \overline{V}$$

Hvis $n = -2$ (Keplerform; se neste kep.):

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{V}$$

Hvis $n = 1$: $V = ar^2$; $\overline{T} = \overline{V}$ (Harmonisk oscillator)

3-7: Keplerproblemet

La oss gå tilbake til kap. 3-2, med sentrale krefter på formen $f(r) = -k/r^2$, dvs. potensial $V(r) = -k/r$.

Ønsker å bestemme en partikkels bane i dette potensialet, dvs. sammenhengen mellom r og θ .

Vi hadde $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V - l^2/2mr^2)}$, (fremdeles generell $V(r)$) som kan skrives på formen

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V - l^2/2mr^2)}}$$

Innfører $d\theta$ ved å bruke $\dot{\theta} = l/mr^2 \Rightarrow l dt = mr^2 d\theta$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{l dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V - l^2/2mr^2)}}$$

Løsning:

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0$$

Nå spesifiserer vi potensialet, $V = -k/r$, og substituerer $u = 1/r$ ($\Rightarrow du = -dr/r^2$):

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mk u}{l^2} - u^2}}$$

Konstanten θ_0 er bestemt av initialbetingelsene. La oss sette $\theta_0 = 0$, som tilsvarer at polarvinkelen θ regnes i forhold til perihel, dvs det punktet hvor partikkelen er nærmest sentrum.

Integralet i uttrykket for Θ er et standard integral med analytisk løsning:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left[-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \right]$$

der $q = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Sammenligning med forrige side tilsier at vi må velge

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{l^2}, \quad \gamma = -1, \quad q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\beta + 2\gamma u}{\sqrt{q}} = -\frac{1 + \frac{2\gamma u}{\beta}}{\sqrt{1 - 4\alpha\gamma/\beta^2}} = \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}$$

$$\Rightarrow \Theta = -\arccos \frac{\frac{l^2}{mkr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}$$

Innfører eksentrisitet: $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$

Dessuten "banens parameter": $p = l^2/mk$

Dermed: $\Theta = -\arccos \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)$

$$\Rightarrow \cos \Theta = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \quad [\cos(x) = \cos(-x)]$$

$$\Rightarrow \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \Theta$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \Theta}$$

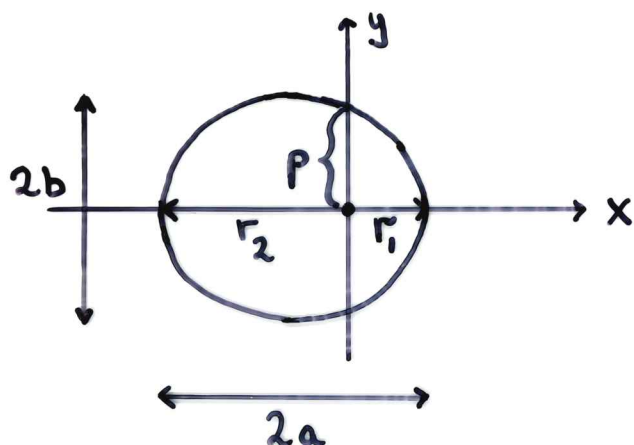
Dette er et kjeglesnitt med brennpunkt i origo.

Vi ser at $\Theta = 0$ tilsvarer $r = r_{\min} = p/(1 + \varepsilon)$; perihel.

Vi kan nå klassifisere ulike typer baner:

$\varepsilon > 1$:	hyperbel	($E > 0$)
$\varepsilon = 1$:	parabel	($E = 0$)
$\varepsilon < 1$:	ellipse	($E < 0$)
$\varepsilon = 0$:	sirkel	($E = -mk^2/2l^2$)

La oss se litt nærmere på ellipsen.



Store halvakse: a

Lille — " —: b

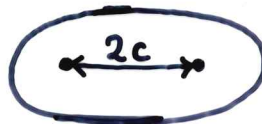
Bundet beregelse: $r_1 \leq r \leq r_2$

$$2a = r_1 + r_2 = \frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \underline{a} = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{l^2/mk}{1-(1+2El^2/mk^2)} = -\frac{k}{2E} = \underline{\frac{k}{2|E|}} \quad (E < 0)$$

Hvis $2c$ er avstanden mellom brennpunktene, gjelder

$$\varepsilon = c/a$$



Videre har vi for en ellipse at $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\text{Dermed: } b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2 \varepsilon^2 = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} (1-\varepsilon^2) = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \underline{b} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{l^2/mk}{\sqrt{-2El^2/mk^2}} = \frac{l}{\sqrt{-2mE}} = \underline{\frac{l}{\sqrt{2m|E|}}}$$

Merk: b avh. av både E og l , a kun avh. av E

Omløpstid T

Vi har vist at "arealhastigheten" er konstant (s.42):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{\ell}{2m}$$

Integrerer over en periode:

$$\int_0^T \frac{dA}{dt} dt = A = \frac{\ell}{2m} T$$

For ellipse: $A = \pi ab \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{\ell} ab$

$$b = \ell / \sqrt{2m|E|}, \quad a = k/2|E|$$

$$\Rightarrow b/\ell = 1/\sqrt{2m|E|} = 1/\sqrt{2m \frac{k}{2a}} = \sqrt{\frac{a}{mk}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi m a \sqrt{\frac{a}{mk}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

som er Keplers 3. lov: $T^2 \sim a^3$

Tidsutviklingen

Vi hadde (fra s.43):

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V - \ell^2/2mr^2)}}$$

Nå er $V = -k/r$. Trenger i tillegg uttrykkene for a og b , samt $a^2 - b^2 = a^2 \epsilon^2$. Får da: (betrakt det ubestemte integralet)

$$t = \int \frac{r dr}{\sqrt{-\frac{2|E|r^2}{m} + \frac{2kr}{m} - \frac{\ell^2}{m^2}}} = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{k}{|E|}r - \frac{\ell^2}{2m|E|}}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{ma}{k}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + 2ar - b^2}}$$

Uttrykket under rottegnet:

$$-r^2 + 2ar - a^2 + a^2 - b^2 = -(r-a)^2 + a^2 \epsilon^2$$

Substituerer: $r - a = -a \epsilon \cos \xi$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{ma}{k}} \int \frac{(a - a \epsilon \cos \xi) a \epsilon \sin \xi d\xi}{\sqrt{a^2 \epsilon^2 - a^2 \epsilon^2 \cos^2 \xi}}$$

$$= \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int (1 - \epsilon \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - \epsilon \sin \xi) + \text{konst.}$$

La oss velge initialpunkt slik at konst. = 0.

Da får vi følgende parameterframstilling av $r(t)$:

$$r = a(1 - \epsilon \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - \epsilon \sin \xi)$$

Vi ser at $\xi = 0$ tilsvarer $t = 0$, og at partikkelen da er i posisjonen $a(1 - \epsilon)$, dvs i perihel.

3-10: Spredning i sentralt kraftfelt

55.

Anta at vi har en uniform strøm av partikler (elektroner, α -partikler, planeter.....) "på vei mot" et kraftsentrum.

Anta lik masse og energi på alle partiklene. Potensialet $V(r)$ er slik at krafta $f(r) = -\partial V / \partial r \rightarrow 0$ når $r \rightarrow \infty$. Kan generelt ha tiltrekkende eller frastøtende $V(r)$.

Beskriver innkommende partikkelstrøm med intensiteten I :

I = antall partikler gjennom en enhet tverrsnittsareal normalt på strømmen pr. tidsenhet

Partikklenes baner avbøyes fra rettlinjet bevegelse når partiklene passerer kraftsentret. Etter passering arter etterhvert kreftene som virker på partiklene, og banene blir til slutt rette linjer igjen.

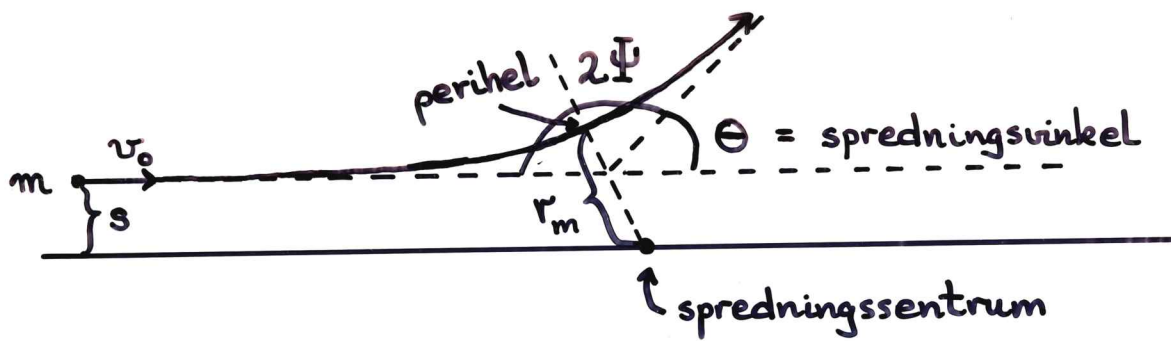
Definerer differensielt spredningstverrsnitt $\sigma(\Omega)$:

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{\text{\# part. spredt inn i romvinkel } d\Omega \text{ pr. tidsenhet}}{\text{innfallende intensitet}} \quad (d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi)$$

$$\text{Dimensjon av } \sigma(\Omega): [\sigma(\Omega)] = \frac{s^{-1}}{m^{-2} s^{-1}} = m^2$$

Sentralkrefter $\Rightarrow$ symmetri omkring aksene som angir innkommende retning $\Rightarrow$ kan betrakte $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ der θ = spredningsvinkelen.

Ser på tilfellet med frastøtende potensial.



Hensiktsmessig å innføre støtparameteren s :

$$l = |\vec{r} \times \vec{p}| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} m v_0 s = m \sqrt{2E/m} s = s \sqrt{2mE}$$

Ved fiksert E og s er spredn.vinkelen Θ entydig bestemt. [jfr. kvantemekanikk: spredn.vinkel Θ måles med en viss sannsynlighet.] Anta at ulike verdier av s gir spredning til ulike retninger Θ .

$\Rightarrow$ # partikler inn mellom s og $s+ds$ = # part. ut mellom Θ og $\Theta+d\Theta$

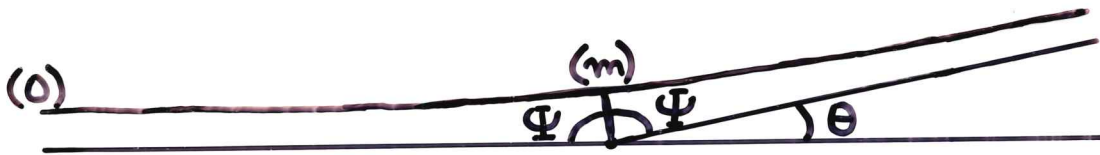
$$\Rightarrow 2\pi I s |ds| = 2\pi \sigma(\Theta) I \sin\Theta |d\Theta|$$

(vil ofte ha $ds/d\Theta < 0 \Rightarrow$ må sette $|ds|$ og $|d\Theta|$)

$$\Rightarrow \sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|$$

Sammenhengen mellom s og Θ kan finnes ved å gå tilbake til [se s.50; boka bruker Θ , "stor teta", for spredn.vinkelen og θ for vinkelen til partikkelbanen; vi har brukt opp θ , så la oss skrive β for vinkelen til banen!] :

$$\beta = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2mV}{\hbar^2} - \frac{1}{r^2}}} + \beta_0$$



$$\theta + 2\Phi = \pi$$

$$r_0 = \infty, \text{ tilsvarende } \beta_0 = \pi$$

$$r = r_m, \text{ tilsvarende } \beta = \pi - \Phi$$

$$\Rightarrow \pi - \Phi = \int_{\infty}^{r_m} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\dots\dots\dots}} + \pi$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - \frac{2mV}{\ell^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

$$\ell = s\sqrt{2mE} \Rightarrow 2mE/\ell^2 = 1/s^2; \quad 2mV/\ell^2 = V/Es^2$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{s^2} - \frac{V}{Es^2} - \frac{1}{r^2}}} = \int_{r_m}^{\infty} \frac{s dr}{r^2 \sqrt{1 - V/E - s^2/r^2}}$$

$$\text{Subst. } u = 1/r, \quad du = -dr/r^2, \quad u_m = 1/r_m$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_0^{u_m} \frac{s du}{\sqrt{1 - V/E - s^2 u^2}}$$

$$\Rightarrow \theta(s) = \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{s du}{\sqrt{1 - V/E - s^2 u^2}}$$

Som regel må $\theta(s)$ beregnes med numeriske metoder.

Kjenner u_m ; gitt ved $1 - V(u_m)/E - s^2 u_m^2 = 0$ siden

$dr = r^2 \frac{\sqrt{2mE}}{\ell} \sqrt{1 - V/E - s^2/r^2} d\beta$, og i perihel er $dr/d\beta = 0$.

Skal se på et eksempel der banen kan beregnes analytisk;
kan da enkelt beregne $s(\theta)$ og dermed $\sigma(\theta)$.

Eks: Repulsiv spredning av ladde partikler i Coulombfeltet

Anta positivt ladde partikler med ladning hhv. Ze og $Z'e$:

$$m \xrightarrow{v_0} \\ Z'e$$

$$\bullet M \\ Z'e$$

Anta videre $M \gg m \Rightarrow$ massesenter ca. ved M ; antas å ligge i ro i vårt referansesystem (= lab.systemet).

$$\text{Coulombkraft: } f(r) = ZZ'e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\text{Coulombpotensial: } V(r) = ZZ'e^2/4\pi\epsilon_0 r$$

Som Keplerproblemet, $V = -k/r$, med $k = -ZZ'e^2/4\pi\epsilon_0$.

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) > 0 \quad [E = \frac{1}{2}mv_0^2]$$

$\Rightarrow$ hyperbelbane med eksentrisitet

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{ZZ'e^2}\right)^2} > 1$$

$$\text{Da } l^2 = s^2 \cdot 2mE, \text{ blir } 2El^2/m = 4E^2 s^2$$

Tidligere (s.51) hadde vi skrevet kjeglesnittet slik:

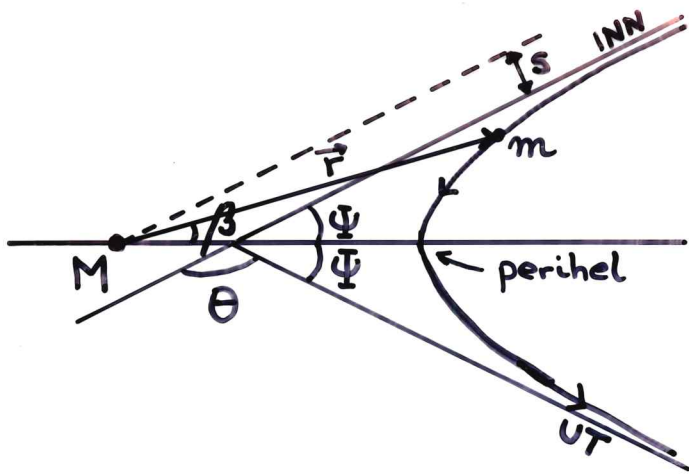
$$p/r = 1 + \epsilon \cos \beta$$

Gyldig for hyperbel, parabel, ellipse; $p = l^2/mk$ for alle typer.

Nå er $k < 0$, dvs $p < 0$. (Kan da skrive:

$$|p|/r = \epsilon \cos \beta - 1 \quad (\cos \beta \geq 1/\epsilon)$$

$$|p| = l^2/m|k| = l^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 / m \cdot ZZ'e^2$$



$$r = \frac{|p|}{\epsilon \cos \beta - 1}$$

Banens asymptoter:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty &\Rightarrow \beta \rightarrow (\pm) \Psi \\ &\Rightarrow \epsilon \cos \Psi - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \cos \Psi = 1/\epsilon \end{aligned}$$

Spredningsvinkel: $\Theta = \pi - 2\Psi$

$$\cos \Psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right) = \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cot^2 \frac{\Theta}{2} &= \frac{\cos^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \frac{1 - \sin^2 \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \frac{1 - 1/\epsilon^2}{1/\epsilon^2} = \epsilon^2 - 1 \\ &= \left(2Es \cdot \frac{4\pi\epsilon_0}{zz'e^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cot \frac{\Theta}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{2Es}{zz'e^2} \quad \left[0 < \Theta < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\Theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cot \frac{\Theta}{2} > 0, \text{ ok!}\right]$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zz'e^2}{2E} \cot \frac{\Theta}{2} = s(\Theta, E)$$

$$\left|\frac{ds}{d\Theta}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zz'e^2}{4E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin \Theta} \left|\frac{ds}{d\Theta}\right| = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zz'e^2}{2E}\right)^2 \frac{\cot \frac{\Theta}{2}}{2\sin \Theta \sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

Bruker $\cot \frac{\Theta}{2} = \frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}}$ og $\sin \Theta = 2 \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}$ og får:

$$\underline{\underline{\sigma(\Theta) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zz'e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \Theta/2}}}$$

Rutherfords
sprednings tverrsnitt

Ikkerelativistisk kvantemekanikk gir samme svar!

Totalt spredningstverrsnitt:

$$\sigma = \int \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin\theta d\theta$$

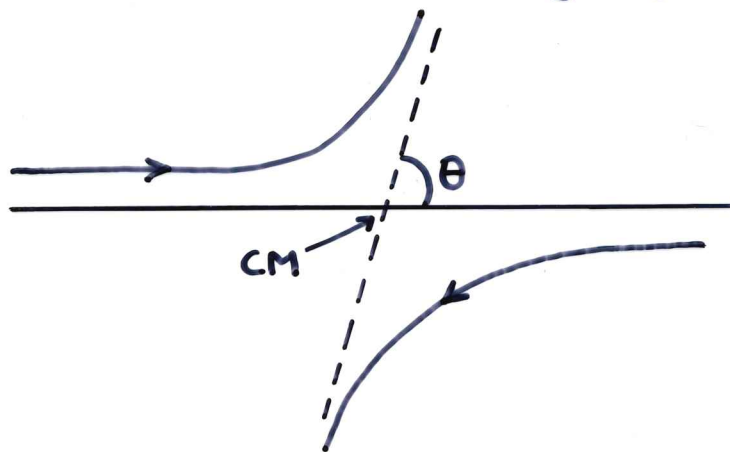
Med Coulombpotensial vil $\sigma(\theta) \sim 1/\sin^4 \theta/2$, og $\sigma \rightarrow \infty$.

Skylles at Coulombkraften har lang rekkevidde, så uansett hvor stor støtparameter s en partikkel har, vil den avbøyes og bidra til σ .

Kvantemekanisk: Hvis $V \rightarrow 0$ forttere enn $1/r^2$ når $r \rightarrow \infty$, vil σ være endelig.

Kommentar:

Vi antok $M \gg m$ og at massesenteret lå tilnærmet i ro sett ifra lab.systemet. Rutherfords formel gjelder alltid i CM-systemet, med θ = vinkelen mellom inn- og utgående partikkel.



I lab.systemet vil vinkelen mellom inn- og utgående partikkel generelt være forskjellig fra θ .

Stivt legeme: system av punktmasser underlagt holonome føringer som uttrykker at avstanden mellom to vilkårlig valgte partikler er konstant

Kinematikk: beregelsens natur og karakter

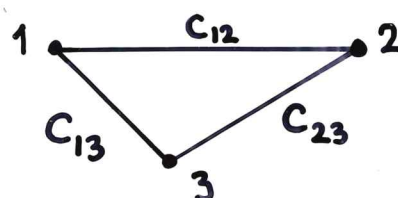
4.1: Uavhengige koordinater

Stivt legeme med N partikler har i utg.punktet $3N$ frihetsgrader. Kraftig reduksjon pga. føringene $r_{ij} = c_{ij}$. Ikke alle $\frac{1}{2}N(N-1)$ føringer er uavhengige.

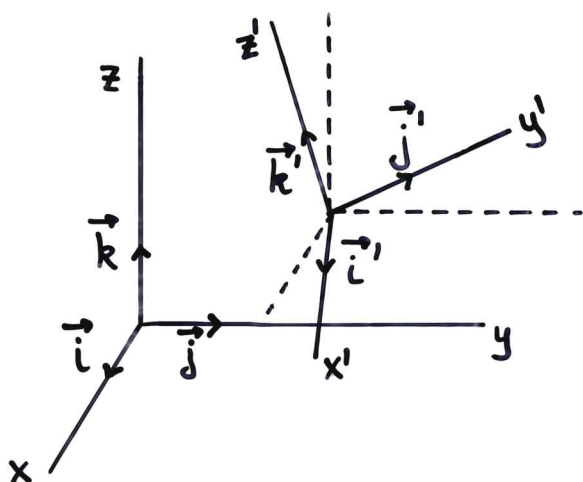
Trenger å angi avstanden til 3 punkter for å spesifisere posisjonen til et vilkårlig punkt. Dermed nok med 3 spesifiserte punkter pluss føringer $r_{ij} = c_{ij}$ til å kjenne posisjonen til samtlige punkter i det stive legemet.

Antall frihetsgrader blir 6:

- * 3 koord. for å spesifisere punkt 1
- * 2 koord. til for å spes. punkt 2 (må ligge på kuleflate med radius $r_{12} = c_{12}$ sentrert i punkt 1)
- * 1 koord. til for å spes. punkt 3 (må ligge på sirkel omkring akselen mellom 1 og 2 slik at $r_{13} = c_{13}$ og $r_{23} = c_{23}$)



La x, y, z være akser i et fast "eksternt" koordinatsystem og x', y', z' aksene i et koordinatsystem som ligger fast i det stive legemet:



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ enhetsvektorer langs x, y, z

$\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ enhetsvektorer langs x', y', z'

Foruten 3 koord. til å spesifisere origo i $(x'y'z')$ -systemet relativt til (xyz) -systemet trengs retningene på x', y' og z' i forhold til x, y, z . Hensiktsmessig å bruke "retningskosene" $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ for å spesifisere retningen på x' :

$$\alpha_1 = \cos(\vec{i}', \vec{i}) = \vec{i}' \cdot \vec{i}$$

$$\alpha_2 = \cos(\vec{i}', \vec{j}) = \vec{i}' \cdot \vec{j}$$

$$\alpha_3 = \cos(\vec{i}', \vec{k}) = \vec{i}' \cdot \vec{k}$$

Vi har: $\vec{i}' = (\vec{i}' \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{i}' \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{i}' \cdot \vec{k})\vec{k}$

Bruker tilsvarende oppskrift med β for $\vec{j}'$ og γ for $\vec{k}'$ og får:

$$\vec{i}' = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}$$

$$\vec{j}' = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}$$

$$\vec{k}' = \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}$$

Kan selvsagt invertere denne prosessen, dvs. uttrykke $\vec{i}, \vec{j}$ og $\vec{k}$ ved sine komponenter langs $\vec{i}', \vec{j}'$ og $\vec{k}'$:

$$\vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{i}')\vec{i}' + (\vec{i} \cdot \vec{j}')\vec{j}' + (\vec{i} \cdot \vec{k}')\vec{k}' = \alpha_1' \vec{i}' + \beta_1' \vec{j}' + \gamma_1' \vec{k}'$$

Retningskosene gir sammenhengen mellom vilkårlige vektorer i de to systemene (x, y, z) og (x', y', z') . [NB: Anta nå felles origo i de to systemene!]

Eks1: En posisjonsvektor $\vec{r}$ har x' -komponent gitt ved

$$x' = \vec{r} \cdot \vec{i}' = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{i}' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$$

Eks2: En vilkårlig vektor $\vec{G}$ har y' -komponent

$$G_{y'} = \vec{G} \cdot \vec{j}' = (G_x \vec{i} + G_y \vec{j} + G_z \vec{k}) \cdot \vec{j}' = \beta_1 G_x + \beta_2 G_y + \beta_3 G_z$$

— . —

Vi har 9 retningskosener $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i=1,2,3$, men trenger bare 3 koordinater for å spesifisere en orientering av et legeme. Reduksjon v.h.a. ortogonalitetsbetingelser!

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = (\alpha_1 \vec{i}' + \beta_1 \vec{j}' + \gamma_1 \vec{k}')^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = (\alpha_1 \vec{i}' + \beta_1 \vec{j}' + \gamma_1 \vec{k}') \cdot (\alpha_2 \vec{i}' + \beta_2 \vec{j}' + \gamma_2 \vec{k}') = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$$

etc. etc.

Jalt 6 betingelser som nettopp reduserer antall uavhengige størrelser fra 9 til 3. På kompakt form:

$$\alpha_\ell \alpha_m + \beta_\ell \beta_m + \gamma_\ell \gamma_m = \delta_{\ell m}$$

— . —

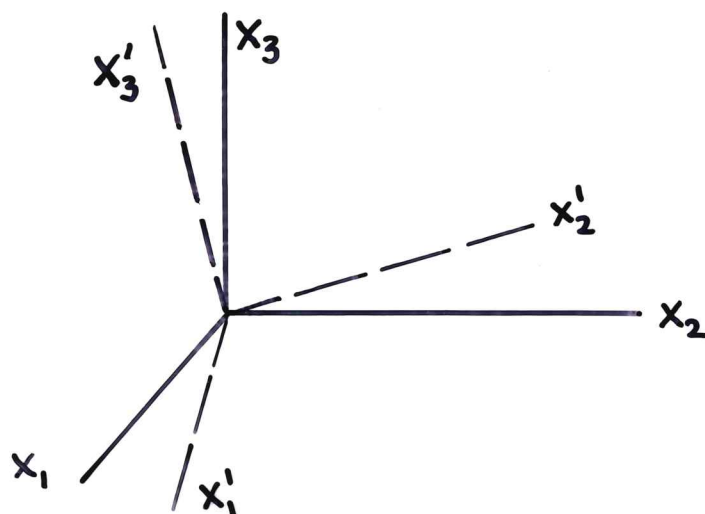
Kan altså ikke bruke retningskosene som generaliserte koord. i f.eks. en Lagrangeformulering, ettersom de ikke er uavhengige.

[Skal se at vi kan formulere sett av tre uavh. funksjoner av retningskosene, jfr. Eulervinklene.] Likevel nyttige størrelser

for å beskrive sammenhengen mellom kartesiske koordinatsystemer, jfr. kvantemekanikk og spesiell relativitetsteori.

4-2: Ortogonale transformasjoner

La $x, y, z \rightarrow x_1, x_2, x_3$; mer hensiktsmessig notasjon.



Transformasjonene blir da:

$$x'_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

$$x'_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

$$x'_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

Dette er en lineær transformasjon som generelt skrives:

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

$$x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$$

$$x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

der a_{ij} er konstante koeffisienter (dvs. uavh. av x, x')

Med summekonvensjon:

$$\textcircled{1} \quad x'_i = a_{ij} x_j \quad (i=1,2,3)$$

Lengden av $\vec{r}$ må være upåvirket av transformasjonen:

$$\Rightarrow x'_i x'_i = x_i x_i \Rightarrow a_{ij} a_{ik} x_j x_k = x_i x_i$$

$$\Rightarrow a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad \textcircled{2}$$

Setter en inn α, β, γ i ② så ser en umiddelbart at dette er akkurat de 6 betingelsene på s. 63.

Den lineære transf. ① kalles ortogonal dersom ② er oppfylt; ② er ortogonalitetsbetingelsene.

Transformasjonsmatrisen: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Matriseelementer: a_{ij}

Eks: To dimensjoner

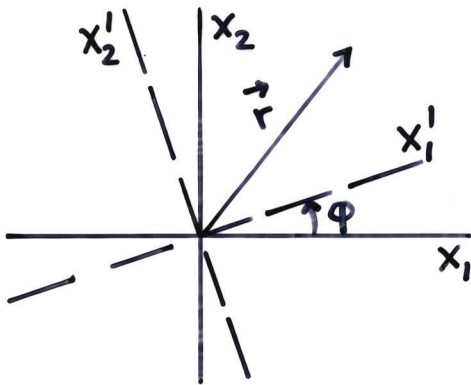
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ortog. bet.: $a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$

$\therefore$ 3 stykker

4 matriseelementer - 3 ortog. bet.

$\Rightarrow$ 1 uavhengig størrelse: rotasjonsvinkelen φ



$$x_1' = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi$$

$$x_2' = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi$$

$$\Rightarrow a_{11} = \cos \varphi, \quad a_{12} = \sin \varphi$$

$$a_{21} = -\sin \varphi, \quad a_{22} = \cos \varphi$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Ortogonalitet: $a_{11} a_{11} + a_{21} a_{21} = 1$

$$a_{12} a_{12} + a_{22} a_{22} = 1$$

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0$$

$$\therefore \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

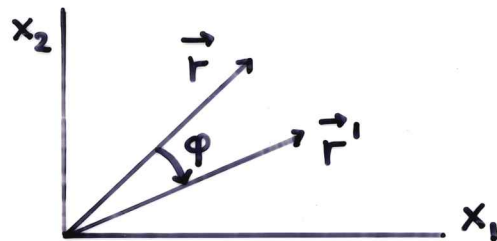
$$\therefore \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\therefore \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

ok!

Transformasjonsligningen $\vec{r}' = A\vec{r}$ kan betraktes på to måter:

- 1) Passiv betraktningsmåte. A er da en operator som roterer koordinatsystemet (mot klokka i eksemplet på forrige side) mens vektoren $\vec{r}$ er i ro. Vi finner dermed komponentene av $\vec{r}$ i det roterte koordinatsystemet.
- 2) Aktiv betraktningsmåte. A oppfattes da som en operator som roterer vektoren $\vec{r}$ mens koordinatsystemet ligger fast. Vi finner dermed en ny vektor $\vec{r}'$ i det uendrede koordinatsystemet. (Må rotere vektoren med klokka for å få samme ligninger $x'_i = a_{ik} x_k$ som ovenfor.)



4.3: Formelle egenskaper til transformasjonsmatrisen

Se på 2 suksessive transformasjoner:

$$\vec{r} \xrightarrow{B} \vec{r}' \xrightarrow{A} \vec{r}''$$

$$\Rightarrow x'_k = b_{kj} x_j, \quad x''_i = a_{ik} x'_k \quad (\text{husk summekonvensjon!})$$

$$\Rightarrow x''_i = a_{ik} b_{kj} x_j \equiv c_{ij} x_j; \quad c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

∴ To ortogonale transf. A, B etter hverandre er ekvivalent med en tredje lineær transf. C ,

$$C = AB \quad (\text{først } B, \text{ deretter } A)$$

Kan vises at C også er en ortogonal transf.

Generelt er $AB \neq BA$, altså ikke kommutativ, mens $(AB)C = A(BC)$, altså assosiativ.

Så langt: kvadratiske matriser.

Innfører søylematriser:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Matrisen AX blir dermed en søylematrise med elementer

$$(AX)_i = a_{ij} x_j = x'_i = (X')_i \quad \therefore X' = AX$$

[Har her ikke gjort noe annet enn å skrive vektoren $\vec{r}$ som en (søyle-)matrise X , der antall elementer tilsvarer dimensjonaliteten til rommet vi betrakter.]

Invers transformasjon: A^{-1} , matriseelementer a_{ij}^{-1}
 [NB: a_{ij}^{-1} er (i,j) -elementet av A^{-1} ; ikke én dividert med (i,j) -elementet av A]

Transformasjonen A^{-1} skal bringe $\vec{r}'$ tilbake til $\vec{r}$:

$$x_i = a_{ij}^{-1} x_j'$$

$$\Rightarrow x_k' = a_{ki} x_i = a_{ki} a_{ij}^{-1} x_j'$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_{ki} a_{ij}^{-1}}_{\text{matr. elem. av } A A^{-1}} = \underbrace{\delta_{kj}}_{\text{matr. elem. av } \mathbb{1}} \Rightarrow A A^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Av $x_i = a_{ij}^{-1} x_j' = a_{ij}^{-1} a_{jk} x_k$ f.ås $a_{ij}^{-1} a_{jk} = \delta_{ik}$, dvs $A^{-1} A = \mathbb{1}$,
 m.a.o. A og A^{-1} kommutterer.

Se på dobbeltsummen $a_{kl} a_{ki} a_{ij}^{-1}$. Ved å bruke ortog. bet. $a_{kl} a_{ki} = \delta_{il}$ blir dette lik a_{lj}^{-1} . Alternativt kan vi bruke at $a_{ki} a_{ij}^{-1} = \delta_{kj}$, og dermed blir dobbeltsummen lik a_{jl} . Altså: $a_{lj}^{-1} = a_{jl}$. Men $a_{jl} = \tilde{a}_{lj}$, dvs. (j,l) -elementet av A er lik (l,j) -elementet av den transponerte matrisen $\tilde{A}$.

$\Rightarrow$ For ortogonale matriser gjelder: $A^{-1} = \tilde{A}$; $\tilde{A} A = \mathbb{1}$

$$\tilde{A} A = \mathbb{1} \Rightarrow \tilde{a}_{ij} a_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik} \quad (\text{sum over 1. indeks})$$

$$A \tilde{A} = \mathbb{1} \Rightarrow a_{ij} \tilde{a}_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik} \quad (\text{sum over 2. indeks})$$

Determinant: $|A|$ (forutsetter kvadratisk matrise) 69.

$$|AB| = |A| |B| \quad (\text{se matematikk fra 2.klasse!})$$

Da $\tilde{A}A = \mathbb{1}$ blir $|\tilde{A}| \cdot |A| = 1$, og da determinanten ikke anghenger av ombytte linjer $\leftrightarrow$ spalter, får vi $|\tilde{A}| = |A|$. Dermed: $|A|^2 = 1$, $|A| = \pm 1$.

Gyldig for alle ortogonale matriser.

4-4: Eulervinklene

Har fra før: de 9 a_{ij} ikke brukbare som gen. koord. fordi de ikke er uavhengige; 6 ortogonalitetsbet. reduserer antall uavh. størrelser til 3.

En ekstra betingelse: Transformasjonen må være fysisk mulig

$\Rightarrow$ transf. matrisen må framgå kontinuerlig fra enhetsmatrisen

$\Rightarrow |A| = |\mathbb{1}| = +1$; kan ikke ha $|A| = -1$

Matrisen $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$ innebærer refleksjon av

koordinataksene: $x' = Sx \Rightarrow x' = -x, y' = -y, z' = -z$

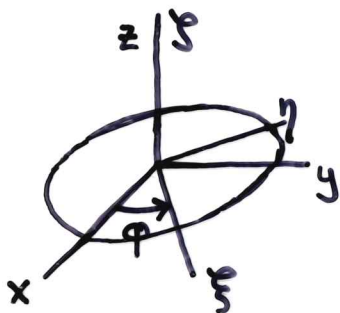
Må utelates da $|S| = -1$. Rimelig, ettersom S gjør et "høyrehånds" system om til "venstrehånds":



Vi må finne 3 uavh. parametre for å spesifisere orienteringen til det stive legemet. Disse må være slike at den tilhørende ortog. transf.matriksen A har $|A| = +1$.

Mest vanlig: Eulervinklene, som er 3 suksessive rotasjonsvinkler.

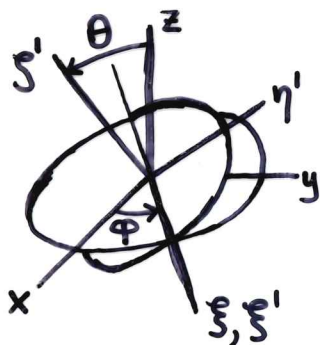
1. $xyz \rightarrow \xi\eta\zeta$ ved rotasjon φ i positiv dreieretning omkring z -aksen:



$$\xi = D \times$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad \times = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

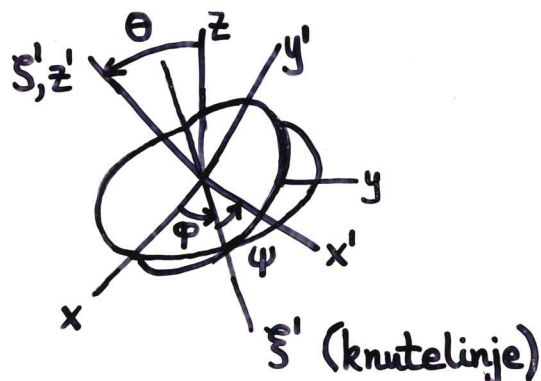
2. $\xi\eta\zeta \rightarrow \xi'\eta'\zeta'$ ved rotasjon θ i pos. dreieretn. om ξ -aksen:



$$\xi' = C \xi \quad \xi' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}$$

ξ' -aksen er skjæringslinjen mellom xy - og $\xi'\eta'$ -planene

3. $\xi'\eta'\zeta' \rightarrow x'y'z'$ ved rotasjon ψ i pos. dreieretn. om ξ' -aksen:



$$\times' = B \xi' \quad \times' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \times' = A \times ; A = B C D$$

$\mathbb{D}$ beskriver rot. omkring z :

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}$ beskriver rot. omkring y :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$\mathbb{B}$ beskriver rot. omkring x' :

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

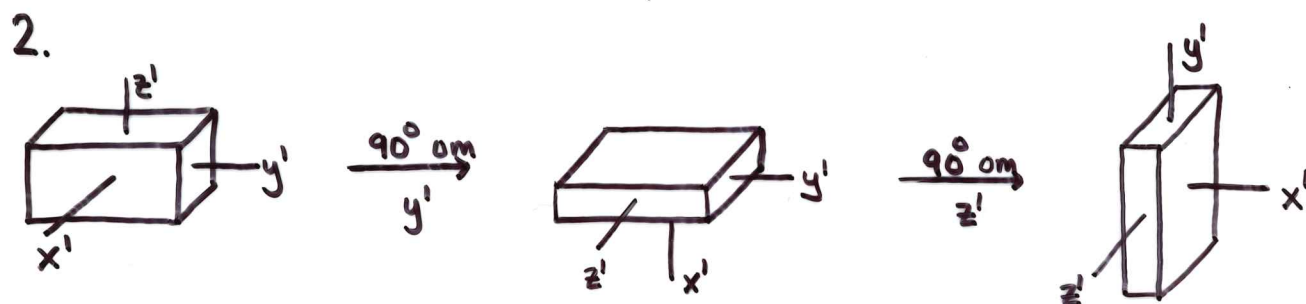
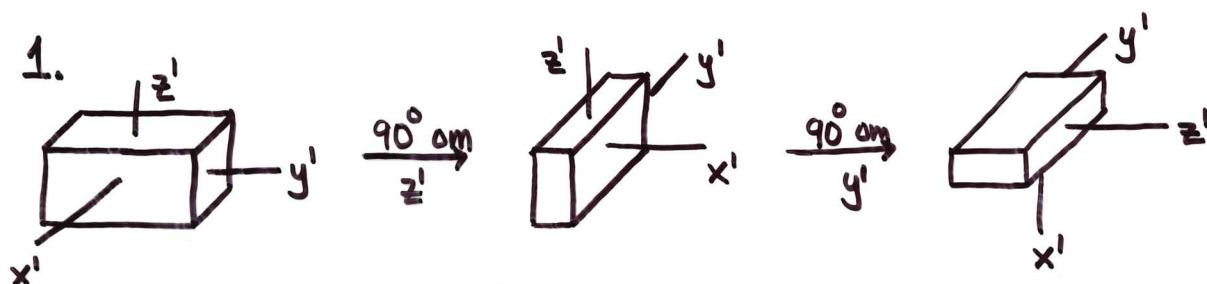
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi, & \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi, & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi, & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi, & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi, & -\sin \theta \cos \varphi, & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Den inverse transf. $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1} \mathbb{X}'$ er gitt ved $\tilde{\mathbb{A}}$ som f.eks ved
 å la linjer $\leftrightarrow$ søyler i $\mathbb{A}$ (husk: $\mathbb{A}^{-1} = \tilde{\mathbb{A}}$).

4-8: Infinitesimale rotasjoner

72.

To påfølgende rotasjoner kan beskrives med produkt av to matriser, AB . Vi vet at matrisemultiplikasjon generelt ikke er kommutativ, dvs $AB \neq BA$. Fysisk uttrykker dette at rotasjonenes rekkefølge ikke er likegyldig. Sees best med et eksempel:



Så langt: endelige transformasjoner.

Skal se at infinitesimale transformasjoner er kommutative.

$$x'_i = x_i + \epsilon_{ij} x_j = (\delta_{ij} + \epsilon_{ij}) x_j \quad , \quad \epsilon_{ij} \ll 1$$

På matriseform:

$$\mathbb{X}' = (\mathbb{1} + \mathbb{E}) \mathbb{X}$$

To suksessive inf. transf. :

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} + \mathbb{E}_1)(\mathbb{1} + \mathbb{E}_2) &= \mathbb{1} + \mathbb{E}_1 \mathbb{1} + \mathbb{1} \mathbb{E}_2 + \dots \\ &= \mathbb{1} + \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 \end{aligned}$$

Da $\mathbb{1} + \epsilon_1 + \epsilon_2 = \mathbb{1} + \epsilon_2 + \epsilon_1$, har vi

$$(\mathbb{1} + \epsilon_1)(\mathbb{1} + \epsilon_2) = (\mathbb{1} + \epsilon_2)(\mathbb{1} + \epsilon_1) \quad \text{d: kommutative}$$

Invers inf. transf.: $A^{-1} = \mathbb{1} - \epsilon$

fordi $AA^{-1} = (\mathbb{1} + \epsilon)(\mathbb{1} - \epsilon) = \mathbb{1} \quad (+ \mathcal{O}(\epsilon^2))$

Ortogonalitet: $\tilde{A} \equiv \mathbb{1} + \tilde{\epsilon} = A^{-1}$

$$\Rightarrow \tilde{\epsilon} = -\epsilon \quad \Rightarrow \tilde{\epsilon}_{ij} \equiv \epsilon_{ji} = -\epsilon_{ij} \quad \text{d: antisymmetrisk}$$

Antisymm. 3×3 matrise: 3 uavh. elementer

Kan skrives på formen

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dermed:

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} \equiv d\mathbf{x} = \epsilon \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

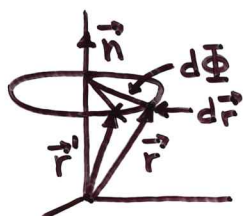
$$dx_1 = x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2$$

$$dx_2 = x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3$$

$$dx_3 = x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{\Omega}$$

Størrelsen $d\vec{\Omega}$ er en differensiell vektor (ikke differensialet av en endelig vektor), $d\vec{\Omega} = \vec{n} d\Phi$



$$d\vec{r} = \vec{r} \times \vec{n} d\Phi \quad (\text{se s. 32})$$

4-9: Tidsendring av en vektor

74.

Endringen av en vilkårlig vektor $\vec{G}$ $[= \vec{r}, \vec{v}, \vec{L}, \dots]$ vil oppleves forskjellig i legemets faste koordinatsystem og i et eksternt koordinatsystem: $(d\vec{G})_{\text{body}} \neq (d\vec{G})_{\text{space}}$

Forskjellen skyldes rotasjon av legemets koord.system i det eksterne koord.systemet. Betrakt fiksert vektor i legemet, dvs $(d\vec{G})_{\text{body}} = 0$. Da blir

$$(d\vec{G})_{\text{space}} = (d\vec{G})_{\text{rot.}} = d\vec{\Omega} \times \vec{G} \quad [\text{Eks: } d\vec{r} = d\vec{\Omega} \times \vec{r}]$$

Generelt:

$$(d\vec{G})_{\text{space}} = (d\vec{G})_{\text{body}} + d\vec{\Omega} \times \vec{G}$$

Tidsendringene er da relatert ved

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{G}$$

med instantan vinkelhastighet $\vec{\omega} = d\vec{\Omega}/dt$.

Da $\vec{G}$ er en generell vektor, kan vi skrive

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \quad ; \quad \text{"operatorrelasjon"}$$

Eks: $\vec{G} = \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{v}_{\text{space}} = \vec{v}_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Mer formell utledning av $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times$:
(Goldstein s. 175)

74a.

$$G_i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komp. langs } x_i \\ (i \text{ rommet})}}{a_{ij}^{-1}} G_j' = \tilde{a}_{ij} G_j' = a_{ji} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komp. langs } x_j' \\ (i \text{ legemet})}}{G_j'}$$

I løpet av dt endrer både G_j' og a_{ji} seg

$$\Rightarrow dG_i = a_{ji} dG_j' + da_{ji} G_j' \quad (1)$$

Legg (xyz) sammenfallende med $(x'y'z')$ ved tidspunkt $t=0$

$\Rightarrow$ komponentene like: $G_j' = G_j$

men differensialene ulike: $a_{ji} dG_j' = dG_i' \quad [\text{fordi } a_{ji}(t=0) = \delta_{ji}]$
 $\therefore dG_i = dG_i' + da_{ji} G_j'$

$A=1$ ved $t=0$; endres til $1+\epsilon$ i løpet av dt

$$\Rightarrow da_{ji} = (\tilde{\epsilon})_{ij} = -(\epsilon)_{ij} = -\epsilon_{ij} \quad (\text{pga. antisymmetri})$$

Kan bruke Levi-Civita tensoren for å uttrykke ϵ_{ij} :

$$-\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk} d\Omega_k = \epsilon_{ikj} d\Omega_k \quad (\text{def. av } \epsilon_{ijk} \text{ s. 11})$$

$$[\Rightarrow -\epsilon_{11} = -\epsilon_{22} = -\epsilon_{33} = 0; -\epsilon_{12} = \epsilon_{132} d\Omega_3 = -d\Omega_3 \text{ etc.} \Rightarrow \text{OK; se s. 73}]$$

Kan nå skrive (1) på formen

$$\begin{aligned} dG_i &= dG_i' + \epsilon_{ikj} d\Omega_k G_j' \\ &= dG_i' + [d\vec{\Omega} \times \vec{G}]_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\vec{G} = d\vec{G}' + d\vec{\Omega} \times \vec{G} \quad ; \quad \text{det samme som på s. 74}$$

Ønsker å finne komponentene av $\vec{\omega}$ langs legemets akser x', y', z' . Rotasjonen som svarer til $\vec{\omega}$ kan oppfattes som 3 suksessive rotasjoner med vinkelhastigheter hhv. $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\psi = \dot{\psi}$.

$\vec{\omega}_\varphi$ tilsvarer rot. omkring z -aksen, dvs $\vec{\omega}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$, og transformerer slik:

$$\vec{\omega}'_\varphi = A \vec{\omega}_\varphi$$

Med A fra s. 71 får vi:

$$(\omega_\varphi)_{x'} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad (\omega_\varphi)_{y'} = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \quad (\omega_\varphi)_{z'} = \dot{\varphi} \cos \theta$$

$\vec{\omega}_\theta$ tilsv. ^{omkring $\hat{S}$, og dermed} rot. omkring $\hat{S}$ -aksen, dvs $\vec{\omega}_\theta = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, og transf. slik:

$$\vec{\omega}'_\theta = B \vec{\omega}_\theta$$

Med B fra s. 71:

$$(\omega_\theta)_{x'} = \dot{\theta} \cos \psi, \quad (\omega_\theta)_{y'} = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad (\omega_\theta)_{z'} = 0$$

Da $\vec{\omega}_\psi$ tilsv. rot. omkring $\hat{S}'$, og dermed omkring z' , er ingen transf. nødvendig: $\vec{\omega}'_\psi = \vec{\omega}_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (\omega_\psi)_{x'} &= 0 \\ (\omega_\psi)_{y'} &= 0 \\ (\omega_\psi)_{z'} &= \dot{\psi} \end{aligned}$$

Legges de 3 bidragene sammen, fås:

$$\omega_{x'} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_{y'} = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

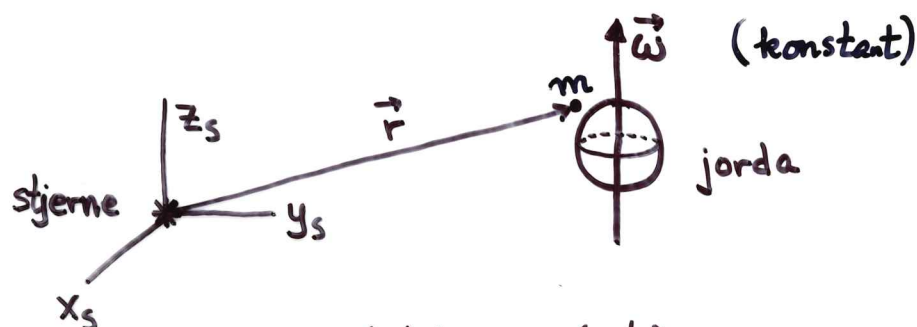
$$\omega_{z'} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

4-10: Corioliskraften

Går tilbake til $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times$

La "space"-systemet være et (tilnærmet) inertialsystem fiksert i forhold til våre nærmeste stjerner; indeks s.

"Body"-systemet har akser som roterer med jorda; indeks r (for relativ).



$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times$$

Setter inn $\vec{r}$:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Setter inn $\vec{v}_s$:

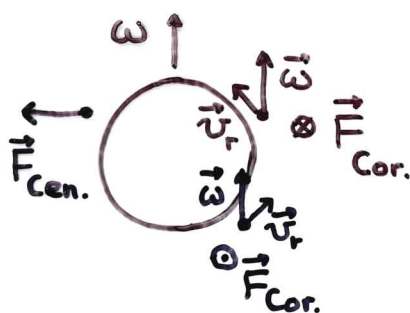
$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_s &= \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_s \\ &= \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \right]_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_s = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Bereg. lign. i inertialsystemet, $\vec{F} = m\vec{a}_s$, kan nå skrives slik:

$$\vec{F}_{\text{eff}} = m\vec{a}_r ; \quad \vec{F}_{\text{eff}} = \vec{F} + \underbrace{2m\vec{v}_r \times \vec{\omega}}_{\text{Corioliskraften}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Sentrifugalkraften}}$$

* Inertialsystem: Newtons lover gjelder

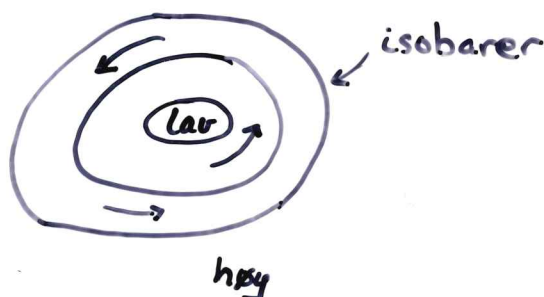
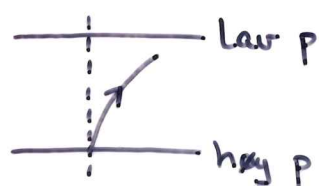


⇒ Avvik mot høyre på nordlige halvkule
venstre på sørlige

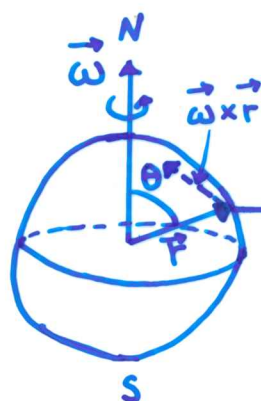
$$\omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

- ⊗ Med r = jordradius fås $r\omega^2 = 3.38 \text{ cm/s}^2$
= maksimal sentripetalakselerasjon

$\vec{F}_{\text{Cor.}}$ påvirker vindsystemer:

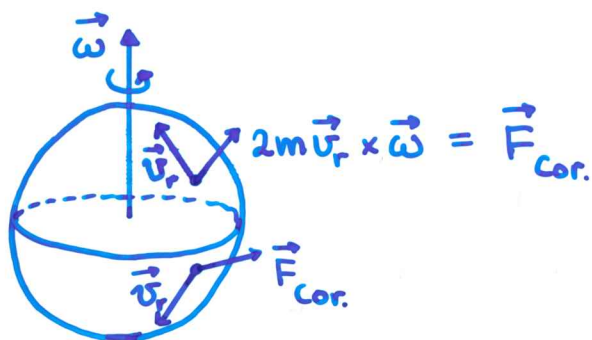


- ⊗ Her har vi igjen (som på s. 74a) lagt rommets akser sammenfallende med legemets akser ved et gitt tidspunkt.



$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{F}_{\text{cen.}} ; |\vec{F}_{\text{cen.}}| = m\omega^2 r \sin \theta$$

$$\Rightarrow a_{\text{cen}}^{\text{max}} = \omega^2 r = 3.38 \text{ cm/s}^2 \text{ (ved ekvator)}$$



$$a_{\text{Cor}}^{\text{max}} = 2v_r\omega$$

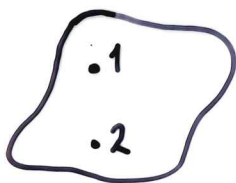
$$v_r = 1 \text{ km/s} \Rightarrow a_{\text{Cor}}^{\text{max}} = 15 \text{ cm/s}^2$$

KAP. 5: BEVEGELSESLIGNINGER FOR STIVE LEGEMER

3 kap. 4: uavhengige koordinater (Eulervinklene)
 ortogonale transformasjoner (+matriseregning)
 ∴ "verktøy" for å beskrive stive legemers
 bevegelse

3 kap. 5: dynamikk, bevegelsesligninger, anvendelser

5-1: Dreieimpuls og kinetisk energi



Betrakt rotasjon av stivt legeme.

Vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ er den samme for
 alle punkter i legemet: $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$

(Opplagt!? Formelt bevis i Goldstein s. 190)

Kan derfor si at $\vec{\omega}$ gjelder for legemet som helhet.

Kan legge origo der vi vil; naturlig valg er tyngdepunktet.

Antar videre rotasjon omkring fast punkt, f.eks. CM.

Total dreieimpuls omkring det faste punktet:

$$\vec{L} = m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \quad (\text{summekonv. !})$$

$$\text{Ren rotasjonsbevegelse} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

Se på komponentene av $\vec{L}$, f.eks. L_x :

$$\begin{aligned} L_x &= m_i [\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \\ &= m_i [\omega_x (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i] \end{aligned}$$

$\therefore$ komp. av $\vec{L}$ er lineært relatert til komp. av $\vec{\omega}$

Det kan skrives på formen

$$L_j = I_{jk} \omega_k \quad ; \quad I_{jk} \text{ er treghetsmatrisen} \\ \text{(-tensoren)}$$

$$I_{xx} = m_i (r_i^2 - x_i^2)$$

$$I_{xy} = -m_i x_i y_i \quad \text{etc.}$$

Med kontinuerlig fordeling av masse: $m_i \rightarrow \rho(\vec{r})$, $\sum_i \rightarrow \int_V dV$

$$\Rightarrow I_{xx} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 - x^2) dV \quad I_{xy} = - \int_V \rho(\vec{r}) xy dV$$

Ved å la $x, y, z \rightarrow x_1, x_2, x_3$ kan vi skrive generelt:

$$I_{jk} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV$$

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega}$$

$\vec{L}, \vec{\omega}$: vektorer

$\overset{\leftrightarrow}{I}$: matrise, tensor, dyade

Kinetisk energi for bevegelsen omkring det faste punktet:

$$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ = \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

Har her brukt $\vec{v}_i (= \vec{v}_{i, \text{space}}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, da $\vec{v}_{i, \text{body}} = 0$.

$$\text{Innfører } \vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega}$$

$$\text{Kan også skrives som: } T = \frac{1}{2} \omega_j I_{jk} \omega_k = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$$

Med $\vec{n}$ som rotasjonsakse, dvs $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, får vi

$$T = \frac{1}{2} n_j \omega I_{jk} n_k \omega = \frac{1}{2} (n_j I_{jk} n_k) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

der $I \equiv n_j I_{jk} n_k = \vec{n} \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{n}$ er treghetsmomentet omkring rotasjonsaksen.

Av definisjonen s. 79 ser en at $I_{jk} = I_{kj}$, dvs $\overset{\leftrightarrow}{I}$ er en symmetrisk matrise. Videre er alle I_{jk} reelle, og dermed er $\overset{\leftrightarrow}{I}$ hermitesk (selvadjungert), jfr. QM.

$$[\text{Hermitesk operator: } A = A^\dagger \equiv (\tilde{A})^*]$$

Da kan vi alltid diagonalisere $\overset{\leftrightarrow}{I}$, dvs. finne koord. system der $\overset{\leftrightarrow}{I}$ er diagonal:

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}; \text{ hovedtreghetsmomenter } I_1, I_2, I_3$$

Hovedakser: x_1, x_2, x_3

Dreieimpuls: $L_1 = I_1 \omega_1, L_2 = I_2 \omega_2, L_3 = I_3 \omega_3$

Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$

Eks:

Symmetrisk snurrebass: $I_1 = I_2 \neq I_3$

Sfærisk snurrebass: $I_1 = I_2 = I_3 = I$

$$\Rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega}$$

5-5: Eulerligningene (Goldstein s.204-205)

Skal finne bevegelsesligninger for rotasjon av et stivt legeme omkring et fast punkt.

Fra kap. 1: $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{space}} = \vec{N}$; gjelder i inertialsystemet (dvs i det faste systemet som ikke roterer).

Fra kap. 4: $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Altså, sett fra det roterende koord.systemet (dropp subscript "body"):

$$\underline{\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}}$$

som er Eulerlign. når ett punkt er fiksert.

Eks: Anta legemets akser langs hovedaksene.

$$\Rightarrow L_1 = I_1 \omega_1, L_2 = I_2 \omega_2, L_3 = I_3 \omega_3$$

$$i\text{-komponenten av Eulerlign. : } \dot{L}_i + \epsilon_{ijk} \omega_j L_k = N_i$$

$$\Rightarrow I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) = N_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) = N_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = N_3$$

5-6: Fri rotasjon av stivt legeme; presesjon
(Goldstein s. 205, 210-212)

$$\begin{aligned}\vec{N} = 0 &\Rightarrow I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2)\end{aligned}$$

Må ha flg. to beveg.konst.: kinetisk energi og total dreieimpuls.

Anta symmetrisk legeme: $I_1 = I_2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_1 \dot{\omega}_2 &= -(I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0\end{aligned}$$

Av siste ligning: $\omega_3 = \text{konstant}$; bestemt ved gitt initialbetingelse

De to første: $\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2$, $\dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1$

der Ω er en vinkel frekvens,

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3$$

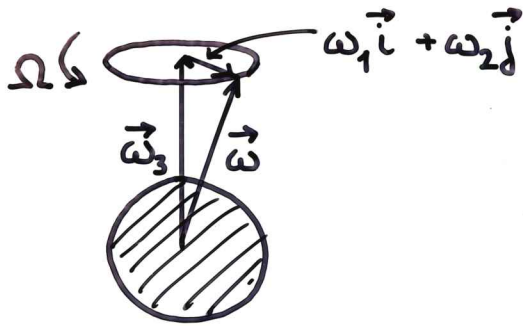
$$\text{Eliminerer } \omega_2 \Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1(t) = A \cos \Omega t, \quad \omega_2(t) = A \sin \Omega t$$

Dvs: Vektoren $\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j}$ har konstant størrelse og roterer (presesserer) omkring legemets z-akse med vinkel frekvens Ω .

$\vec{\omega}$ er konstant i størrelse og presesserer omkring z-aksen.

Presesjonen er relativt til legemets akser, som selv roterer med høyere vinkel frekvens $\vec{\omega}$.



$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

$$= \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (\text{konst.})$$

$$L^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2 \quad (\text{konst.})$$

$\Rightarrow A$ og ω_3 kan uttrykkes ved T og L

Hvis $I_1 \approx I_3$ blir $\Omega \ll \omega$.

Eks: Jorda.

Flatttrykt ved polene $\Rightarrow I_3 > I_1 = I_2$

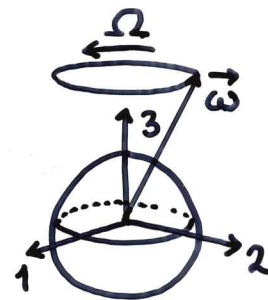
$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \approx \frac{1}{300} \omega_3$$

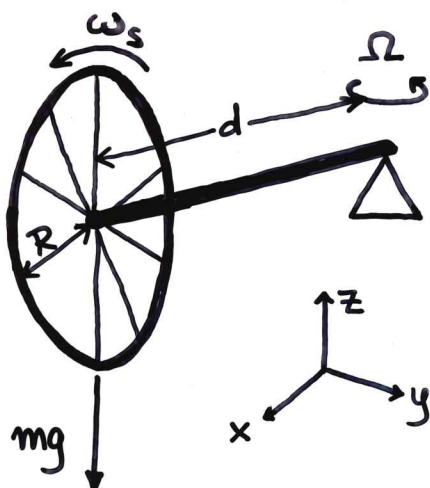
$$\frac{2\pi}{\omega_3} = 1 \text{ døgn}$$

$$\Rightarrow \text{Presesjonsperiode: } \frac{2\pi}{\Omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_3} \cdot 300 = 300 \text{ døgn}$$

Målt verdi: 440 døgn ("Chandler wobble")

Avvik antas å skyldes at jorda ikke er et perfekt stivt legeme



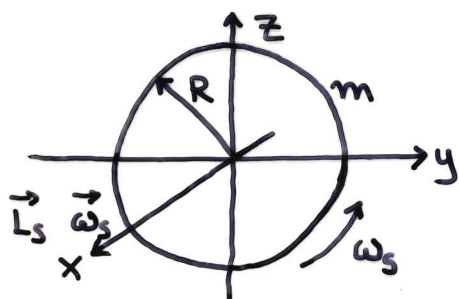
Eks: Gyroskopeffekt

Hjul orientert vertikalt, i yz -planet. Enden på akslingen hviler fritt på et støttepunkt.

Når hjulet roterer hurtig, med vinkel frekvens ω_s , vil det presessere i horisontalplanet med vinkel frekvens Ω .

$$\vec{\omega}_s = \omega_s \hat{x} ; \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, \quad I_x = \int dm (r^2 - x^2) = mR^2$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = \vec{I} \vec{\omega}_s = I_x \omega_s \hat{x} = mR^2 \omega_s \hat{x}$$



Har for enkelhets skyld antatt masseløse eiker i hjulet. Lar koord.systemet xyz ligge fast i forhold til hjulets aksling. (som også har masse $\ll m$)

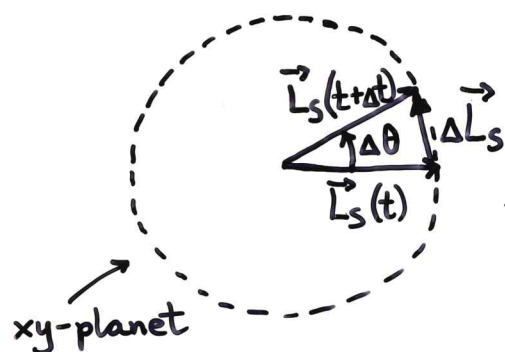
Tyngdekrafta fører til et kraftmoment omkring støttepunktet:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = d\hat{x} \times mg(-\hat{z}) = mgd\hat{y}$$

Kraftmomentet fører til at $\vec{L}_s$ endrer seg (i lab.systemet):

$$d\vec{L}_s = \vec{N} dt$$

Ser nærmere på $d\vec{L}_s$, som er parallell med $\vec{N}$, dvs parallell med $\hat{y}$, og dermed $\perp \vec{L}_s$ ($\Rightarrow \vec{L}_s$ roterer i horisontalplanet)



$$|\Delta \vec{L}_s| \approx |\vec{L}_s| \Delta \theta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{L}_s}{dt} \right| = |\vec{L}_s| \frac{d\theta}{dt} = mR^2\omega_s \cdot \Omega$$

Da kan vi bestemme presesjonshastigheten Ω :

$$\left| d\vec{L}_s/dt \right| = |\vec{N}|$$

$$\Rightarrow mR^2\omega_s \Omega = mgd$$

$$\Rightarrow \underline{\Omega = gd/R^2\omega_s} \quad (\text{ert. } \Omega = mgd/I_0\omega_s ; \text{ treghetsmom. } I_0)$$

Tallverdier for Lekegyroskop:

$$R \approx 22 \text{ mm}, d \approx 32 \text{ mm}, g \approx 10 \text{ m/s}^2, \Omega \sim 1 \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \omega_s \approx \frac{10^4 \cdot 32}{484 \cdot 1} \text{ s}^{-1} \approx \frac{2}{3} \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \approx 700 \text{ s}^{-1}$$

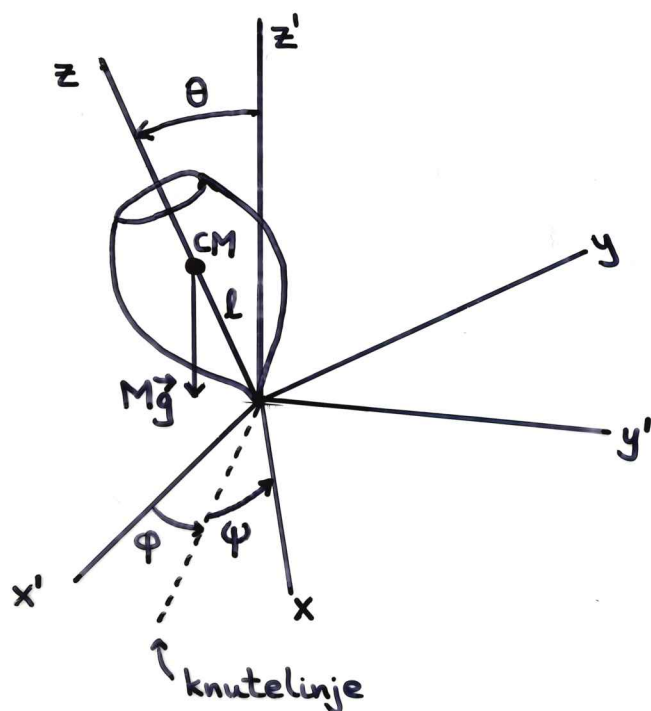


$$\left. \begin{array}{l} v_{\text{snor}}^{\text{max}} \sim 10 \text{ m/s (?) } = 10^3 \text{ cm/s} \\ \text{akslingens omkrets} \approx 1.5 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_s \sim \frac{1}{1.5} \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \approx 700 \text{ s}^{-1}$$

$\Rightarrow$ rimelig samsvar mellom teori og eksperiment !

Friksjon $\Rightarrow \omega_s$ avtar $\Rightarrow \Omega$ øker

Eks: Symmetrisk snurrebass med ett punkt fiksert
(Goldstein kap. 5-7)



Symmetrisk snurrebass spinner omkring en hovedakse; påvirkes av tyngdens akselerasjon $\vec{g}$; ett punkt på symmetriaksen er fiksert.

Koordinatsystem:

$x'y'z'$: fast i rommet, slik at $\vec{g} = -g\hat{z}'$

xyz : fast i snurrebassen, slik at z -aksen er symmetriaksen

Symmetrisk snurrebass $\Rightarrow I_1 = I_2 \neq I_3$ ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$)

Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2} I_j \omega_j^2 = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$

Bruker Eulervinklene φ, θ, ψ som (generaliserte) uavh. koordinater.

Fra s. 75:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2, \quad \omega_3^2 = (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

Potensiell energi:

$$V = -m_i \vec{r}_i \cdot \vec{g} = -M \vec{R} \cdot \vec{g} = Mgl \cos \theta \quad (\vec{R} = l \hat{z})$$

Lagrangefunksjon:

$$L = T - V = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta$$

L uavh. av ϕ og $\psi \Rightarrow \phi, \psi$ sykliske koordinater $\Rightarrow$ tilhørende generaliserte impulser p_ϕ, p_ψ er tidskonstanter.

Kan sees ved fysisk betraktning: $\vec{N} = \vec{R} \times M\vec{g}$ har retning langs knutelinjen, mens z og z' begge står $\perp$ på knutelinjen. Dermed ingen komponent av $\vec{N}$ langs z og $z' \Rightarrow$ ingen endring i dreieimpulsen omkring z og z' .

$$\left. \begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = I_1 a \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = I_1 b \end{aligned} \right\} \text{ definerer } a, b$$

J tillegg: energibevarelse pga. konservativt system

$$E = T + V = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} \omega_3^2 + Mgl \cos \theta$$

$$\text{Fra } p_\psi : I_3 \dot{\psi} = I_1 a - I_3 \dot{\phi} \cos \theta$$

$$\text{Innsatt i uttr. for } p_\phi : I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_1 a \cos \theta = I_1 b$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow E' \equiv E - \underbrace{\frac{I_3}{2} \omega_3^2}_{\text{konst.}} = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta$$

$\therefore$ som et ekvivalent 1-dimensjonalt problem i variabelen θ , med effektivt potensial $V'(\theta) = Mgl \cos \theta + \frac{I_1}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}$

Substituerer $u = \cos \theta$ og innfører nye konstanter $\alpha = 2E'/I_1$ og $\beta = 2Mgl/I_1$. Lign. for E' kan da omskrives:

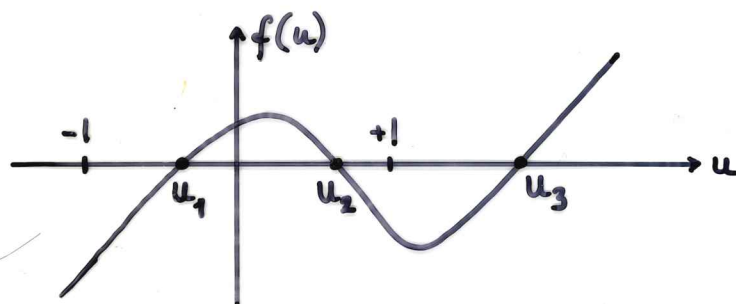
$$E' = \frac{I_1}{2} \frac{\dot{u}^2}{\sin^2 \theta} + \frac{I_1}{2} \frac{(b-au)^2}{\sin^2 \theta} + Mgl u$$

$$\stackrel{\sin^2 \theta = 1-u^2}{\Rightarrow} E'(1-u^2) = \frac{I_1}{2} \dot{u}^2 + \frac{I_1}{2} (b-au)^2 + Mgl u (1-u^2)$$

$$\Rightarrow \alpha(1-u^2) = \dot{u}^2 + (b-au)^2 + \beta u(1-u^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{u}^2 &= (1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b-au)^2 \\ &= \beta u^3 - (\alpha + a^2)u^2 + (2ab - \beta)u + \alpha - b^2 \equiv f(u) \end{aligned}$$

Røtter av høyre side gir $\dot{u} = 0$, dvs $\dot{\theta} = -\dot{u}/\sin \theta = 0$, dvs ved hvilke vinkler θ skifter fortegn.



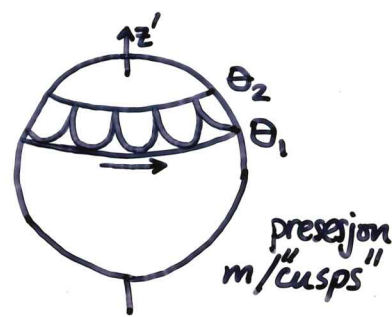
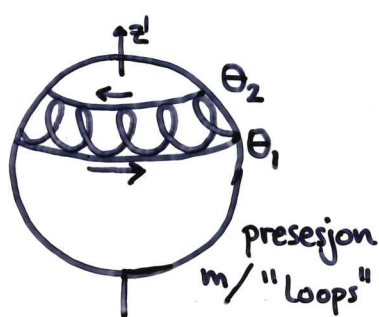
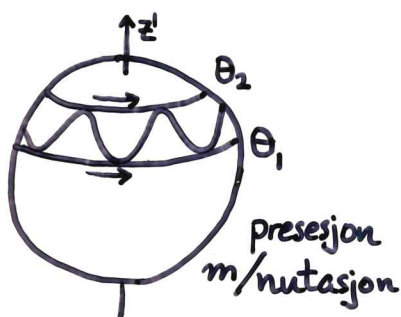
$$f(\pm 1) = -(b \mp a)^2 < 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \pm \infty} f(u) = \pm \infty$$

$\Rightarrow$ må ha rot $u_3 > 1$, ufysisk!

Kun fysisk akseptable verdier for $f(u) = \dot{u}^2 \geq 0$, dvs mellom u_1 og u_2 (som begge ligger mellom -1 og $+1$), dvs vinkelen θ antar verdier slik at $\cos \theta$ ligger mellom u_1 og u_2 .

Kan illustrere beregelsen med linjen som z -aksen tegner på overflaten av en enhetskule med sentrum i det faste punktet.



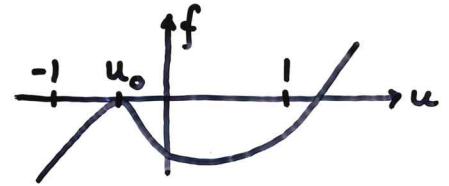
Hva skal til for å få en virkelig regulær presesjon?

$$\therefore \Theta(t) = \Theta(t=0) \equiv \Theta_0$$

$$\therefore \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_0$$

$$\therefore f(u) \text{ må ha dobbel rot i } u_0 = \cos \Theta_0$$

$$\therefore f(u_0) = 0, \quad df(u_0)/du = 0$$



$$f(u_0) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta u_0 = \frac{(b - a u_0)^2}{1 - u_0^2} \quad (1)$$

$$\frac{df(u_0)}{du} = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \frac{a(b - a u_0)}{1 - u_0^2} - u_0 \frac{\alpha - \beta u_0}{1 - u_0^2} \quad (2)$$

$$(1) \text{ innsatt i } (2) \Rightarrow \frac{\beta}{2} = a \frac{b - a u_0}{1 - u_0^2} - u_0 \left(\frac{b - a u_0}{1 - u_0^2} \right)^2$$

$$\text{Fra s. 87 har vi at } \dot{\phi} = \frac{b - a \cos \Theta_0}{\sin^2 \Theta_0} = \frac{b - a u_0}{1 - u_0^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} = a \dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \cos \Theta_0$$

$$\text{Med } \beta = 2Mgl/I_1 \text{ og } a = \frac{I_3 \omega_3}{I_1} = \frac{I_3}{I_1} (\dot{\Psi} + \dot{\phi} \cos \Theta_0) \text{ får vi}$$

$$Mgl = \dot{\phi} (I_3 \omega_3 - I_1 \dot{\phi} \cos \Theta_0)$$

ert.

$$Mgl = \dot{\phi} (I_3 \dot{\Psi} - (I_1 - I_3) \dot{\phi} \cos \Theta_0)$$

$$\rightarrow \text{Kvadratisk lign. i } \dot{\phi}: I_1 \cos \Theta_0 \dot{\phi}^2 - I_3 \omega_3 \dot{\phi} + Mgl = 0$$

Løsning:

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 \omega_3 \pm \sqrt{I_3^2 \omega_3^2 - 4 Mgl I_1 \cos \Theta_0}}{2 I_1 \cos \Theta_0}$$

Krever $\dot{\phi}$ reell

$$\Rightarrow I_3^2 \omega_3^2 > 4 Mgl I_1 \cos \Theta_0$$

$$\Theta_0 > \pi/2 \Rightarrow \cos \Theta_0 < 0 \Rightarrow \text{regulær pres. mulig for vilkårlig } \omega_3$$

$$\Theta_0 < \pi/2 \Rightarrow \cos \Theta_0 > 0 \Rightarrow \text{regulær pres. mulig for } \omega_3 > \frac{2}{I_3} \sqrt{Mgl I_1 \cos \Theta_0}$$

De to røttene for $\dot{\phi}$ betegnes gjerne "langsom" og "rask" presesjon.

Gå tilbake til $Mgl = \dot{\phi} (I_3 \omega_3 - I_1 \dot{\phi} \cos \theta_0)$.

Langsom presesjon $\Rightarrow I_1 \dot{\phi} \cos \theta_0 \ll I_3 \omega_3$

$$\Rightarrow \dot{\phi} \approx Mgl / I_3 \omega_3$$

Rask presesjon $\Rightarrow Mgl \ll$ leddene på høyre side

$$\Rightarrow \dot{\phi} \approx I_3 \omega_3 / I_1 \cos \theta_0$$

~~~~~

Når  $f(u=1) = 0$ , dvs  $\theta = 0$  er en "venderinkel":

Anta  $\theta = 0$  ved  $t = 0$ . Da er  $p_\phi = p_\psi$ , og dermed  $a = b$ . (se s. 87)

Får da for  $E'$ :

$$E' = E - \frac{I_3}{2} \omega_3^2 = \underbrace{\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2}_{=0} + \underbrace{\frac{I_1 a}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}}_{=0} + Mgl = Mgl$$

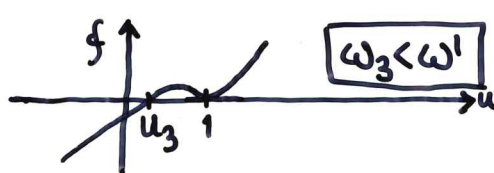
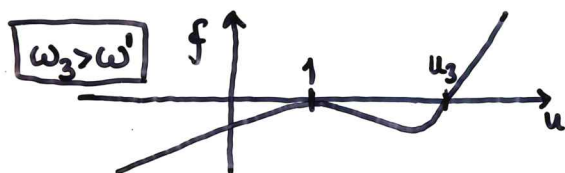
$$\Rightarrow \alpha \equiv 2E' / I_1 = 2Mgl / I_1 = \beta$$

$$\Rightarrow \dot{u}^2 = (1 - u^2) \beta (1 - u) - a^2 (1 - u)^2 = (1 - u)^2 \{ \beta (1 + u) - a^2 \}$$

$$\Rightarrow u = 1 \text{ er dobbel rot; } u_3 = \frac{a^2}{\beta} - 1$$

$$\frac{a^2}{\beta} > 2 \text{ (rask pres.)} \Rightarrow u_3 > 1 \Rightarrow \text{kun mulig med } u = 1, \text{ dvs } \theta = 0$$

$$\frac{a^2}{\beta} < 2 \Rightarrow u_3 < 1 \Rightarrow \text{nutasjon mellom } \theta = 0 \text{ og } \theta = \theta_3$$



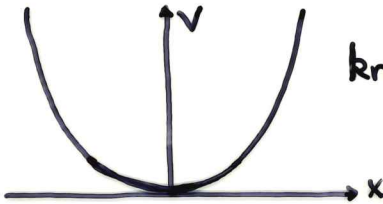
(Husk:  $f = \dot{u}^2 \geq 0$ )

Grensetilfellet:  $\frac{a^2}{\beta} = 2 \Rightarrow \frac{I_3^2 \omega'^2}{2Mgl I_1} = 2 \Rightarrow \omega' = \frac{2}{I_3} \sqrt{Mgl I_1}$

## Anvendelser:

- vibrasjoner i molekyler
- gittervibrasjoner i faste stoffer
- vibrasjoner i mekaniske systemer
- svingninger i koblede elektriske kretser
- akustikk

Kort rekapitulering av endimensjonal harmonisk oscillator:

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$


$$\text{krumning} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k$$

$$F = m\ddot{x}, \quad F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow x(t) = \text{Re}\{A e^{-i\omega_0 t}\}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

∴ harmonisk svingning med vinkelfrekvens  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Med demping (friksjon):  $F_f = -\lambda \dot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = 0 \Rightarrow x(t) = \text{Re}\{A e^{-i(\omega_0 - i\frac{\lambda}{m})t}\} \\ = e^{-\frac{\lambda}{m}t} \text{Re}\{A e^{-i\omega_0 t}\}$$

∴ dempet harmonisk svingning

Resten av kapitlet: Generalisering av enkel harm. osc. til system av koblede lineære harm. osc.



Anta konserverv system, dvs  $V$  kun avhengig av posisjoner. Anta dessuten at evt. fjøringer ikke er tidsavhengige.

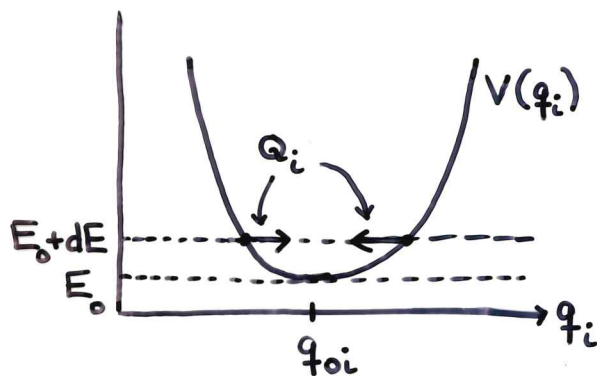
Utg.punkt er som vanlig system med  $N$  "partikler" og  $3N$  frihetsgrader. Med  $k$  fjøringer reduseres antall fihetsgrader til  $n = 3N - k$ . Antar at vi har transformert fra  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$  til  $n$  generaliserte uavhengige koordinater  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ .  
[Se kap. 1 !]

Systemet i likevekt når samtlige generaliserte krefter forsvinner:

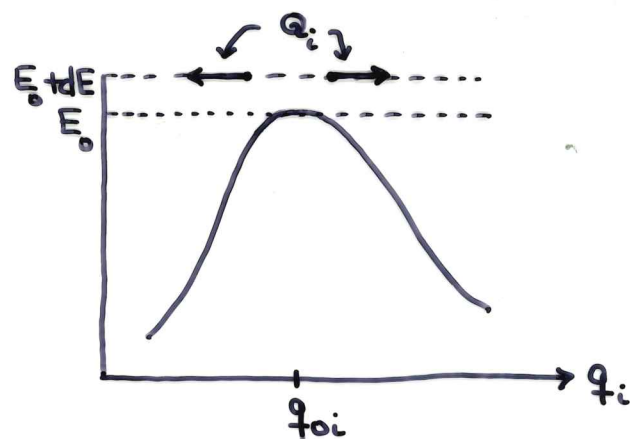
$$Q_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0$$

$\therefore$  ekstremalverdi av  $V$  i likevektskonfigurasjonen  $(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})$ .

Stabil likevekt hvis liten forstyrrelse fra likevekt medfører liten bundet bevegelse omkring likevektsstillingen.



stabil likevekt



ustabil likevekt

Ustabil likevekt hvis liten forstyrrelse fra likevekt gir ubundet bevegelse.

Vi skal kun se på små utsving fra stabil likevekt

$$\Rightarrow q_i = q_{0i} + \eta_i \quad ; \quad \eta_i = \text{utsving fra likevekt}$$

Velger  $\eta_i$  som nye generaliserte koordinater.

Taylorutvikling av  $V$  omkring  $q_{0i}$ :

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = V(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}) + \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 \eta_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j + \dots$$

(Her er  $\left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 \equiv \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q_1=q_{01}, q_2=q_{02}, \dots, q_n=q_{0n}}$  etc., og vi bruker her igjen summekonv. for repeterte indekser:  $\left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 \eta_i \equiv \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 \eta_i$ )

Pga. likevektsbetingelsen (s.92),  $\left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 = 0$ , faller ledd lineære i  $\eta$  bort.

Nullnivå for  $V$  kan velges vilkårlig, f.eks.  $V(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}) = 0$ , og dermed faller også konstantleddet bort.

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \eta_i \eta_j \equiv \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

Ser at  $V_{ij} = V_{ji}$ .

Kinetisk energi  $T$  kan skrives som (homogen) kvadratisk funksjon av hastighetene:

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

Her er generelt koeffisientene  $m_{ij}$  funksjoner av  $q_k$ :

$$m_{ij}(q_1, \dots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left( \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + \dots$$

$$\left[ \text{Jfr. eks. s.14: } T(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow m_{11} = m, m_{22} = m r^2, m_{12} = m_{21} = 0 \right]$$

Uttrykket for  $T$ ,  $\frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$ , allerede kvadratisk i  $\dot{\eta}$

$\Rightarrow$  beholder kun konstantleddet i  $m_{ij}$  til ledende orden

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad ; \quad T_{ij} \equiv m_{ij}(q_0, \dots, q_n)$$

Symmetri:  $T_{ij} = T_{ji}$  (Som regel diagonal,  $T_{ij} = T_i \delta_{ij}$ )

Lagrangefunksjon:

$$L(\eta, \dot{\eta}) = T - V = \frac{1}{2} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j)$$

Bevegelsesligninger (»: Lagranges ligninger) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

La oss se på lign. for en bestemt  $i$ . Bruker da f.eks.  $l$  og  $j$  som summeindeks i uttr. for  $L$ :  $L = \frac{1}{2} (T_{lj} \dot{\eta}_l \dot{\eta}_j - V_{lj} \eta_l \eta_j)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} &= \frac{1}{2} T_{lj} \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_i} (\dot{\eta}_l \dot{\eta}_j) = \frac{1}{2} T_{lj} (\delta_{il} \dot{\eta}_j + \dot{\eta}_l \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_j + \frac{1}{2} T_{li} \dot{\eta}_l \\ &= \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_j + \frac{1}{2} T_{il} \dot{\eta}_l \quad (T_{li} = T_{il}) \\ &= \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_j + \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_j \quad (\text{omdøpt summeindeks: } l \rightarrow j) \\ &= T_{ij} \dot{\eta}_j \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = T_{ij} \frac{d}{dt} \dot{\eta}_j = T_{ij} \ddot{\eta}_j$$

Helt tilsvarende får vi:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = -V_{ij} \eta_j$$



$$\Rightarrow T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

$\therefore$  et sett av  $n$  koblede lineære 2.ordens diff.ligninger.

- Løsningen beskriver systemets bevegelse nær likevekt
- Får  $2n$  integrasjonskonstanter som kan fastlegges med kunnskap om  $2n$  initialbetingelser, f.eks.  $\eta_i$  og  $\dot{\eta}_i$  ved  $t=0$
- Lign. har samme form som endim. harm. oscillator

Må være rimelig å gjøre følgende ansats:

$$\eta_i(t) = A_i e^{-i\omega t}$$

Her er  $A_i$  komplekse amplituder, og det er underforstått at det er  $\text{Re } \eta_i$  som svarer til den virkelige bevegelsen.

Sett inn i bevegelsesligningene:

$$V_{ij} A_j - \omega^2 T_{ij} A_j = 0 \quad ; \quad n \text{ homogene lign. for } A_i$$

Løsningsbetingelse (karakteristisk ligning; sekulær ligning):

$$\det(V - \omega^2 T) = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots & V_{1n} - \omega^2 T_{1n} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_{n1} - \omega^2 T_{n1} & \dots & \dots & V_{nn} - \omega^2 T_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Dette er en  $n$ 'te grads ligning for  $\omega^2$ , med generelt  $n$  forskjellige røtter  $\omega_\alpha^2$  ;  $\alpha=1,2,\dots,n$ .  $\omega_\alpha$  kalles systemets egenfrekvenser.

Av fysiske grunner :  $\omega_\alpha^2 \geq 0$  og  $\omega_\alpha^2$  reell

Hvis ikke, blir  $\omega_\alpha = \omega' + i\omega''$ , og  $e^{-i\omega_\alpha t} = e^{-i\omega' t} e^{\omega'' t}$

$\Rightarrow$  eksponentiell økning ( $\omega'' > 0$ ) eller demping ( $\omega'' < 0$ ) av utsvingene;  
ikke forenlig med energibevarelse!

Anta nå at vi har bestemt egenfrekvensene  $\omega_\alpha$ . Neste spørsmål blir da: Hvordan ser de tilhørende egensvingningene ut?

M.a.o., hvilke deler av systemet beveger seg, og hvor mye beveger de seg, i svingemode  $\alpha$ ?

Må bestemme utsvingsamplitudene  $A_{i\alpha}$  for å kunne svare på det.

$A_{i\alpha}$  = amplituden til utsvinget langs gen.koord.  $q_i$  i mode  $\alpha$

Bestemmes av ligningene

$$(V_{ij} - \omega_\alpha^2 T_{ij}) A_{j\alpha} = 0$$

For gitt  $\omega_\alpha$  er dette  $n$  ligninger som bestemmer  $n-1$  av komp. i "amplitudevektoren"

$$\vec{A}_\alpha = \begin{pmatrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \\ \vdots \\ A_{n\alpha} \end{pmatrix}$$

Står igjen med én ubestemt komponent, f.eks.  $A_{1\alpha}$ , for hver  $\alpha$ .

Da  $A_{1\alpha}$  generelt er kompleks, er det dermed 2 ubestemte størrelser for hver  $\alpha$  (absoluttverdi og fase for  $A_{1\alpha}$ ), og ialt  $2n$  ubestemte størrelser - OK! Som nevnt før, trengs  $2n$  initialbetingelser for å bestemme løsningen fullstendig.

Anta nå at alle egenfrekvensene  $\omega_\alpha$  er forskjellige. Skal da vise at  $A_{i\alpha}$  er proporsjonal med "minoren"  $\Delta_{i\alpha}$  til determinanten  $|\mathbb{V} - \omega_\alpha^2 \mathbb{T}|$ . "Minoren" (evt. kofaktoren)  $\Delta_{i\alpha}$  er underdeterminanten som framkommer ved å fjerne rekke nr.  $i$  og kolonne nr.  $\alpha$  fra den determ. vi startet med. Fortegnet til  $\Delta_{i\alpha}$  er gitt ved  $(-1)^{i+\alpha}$ .

"Bevis" for at  $A_{i\alpha} \propto \Delta_{i\alpha}$ :

Ser på tilfellet med  $n=3$  og ligningen for  $\alpha=1$  og  $i=1$ :

$$\sum_{j=1}^n (V_{ij} - \omega_\alpha^2 T_{ij}) A_{j\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow (V_{11} - \omega_1^2 T_{11}) A_{11} + (V_{12} - \omega_1^2 T_{12}) A_{21} + (V_{13} - \omega_1^2 T_{13}) A_{31} = 0$$

Dette uttrykket sammenligner vi med  $|\mathbb{V} - \omega_\alpha^2 \mathbb{T}| = 0$  når vi setter  $\alpha=1$  og utvikler determinanten etter 1. kolonne:

$$(V_{11} - \omega_1^2 T_{11}) \Delta_{11} + (V_{21} - \omega_1^2 T_{21}) \Delta_{21} + (V_{31} - \omega_1^2 T_{31}) \Delta_{31} = 0$$

Da  $\mathbb{V}$  og  $\mathbb{T}$  begge er symmetriske, kan vi bytte om indekser i  $V_{ij}$  og  $T_{ij}$  i lign. med  $A$ -er. Hvis vi deretter skriver

$$A_{i\alpha} = C_\alpha \Delta_{i\alpha}$$

(der  $C_\alpha$  er en kompleks proporsjonalitetskonstant) får vi:

$$(V_{11} - \omega_1^2 T_{11}) C_1 \Delta_{11} + (V_{21} - \omega_1^2 T_{21}) C_1 \Delta_{21} + (V_{31} - \omega_1^2 T_{31}) C_1 \Delta_{31} = 0$$

som er nettopp den karakteristiske ligningen. QED!



Vi hadde (fra s. 95)  $\eta_i = A_i e^{-i\omega t}$ . Har nå funnet at systemet kan oscillere med egenfrekvensene  $\omega_\alpha$ . Utsvinget langs gen. koord.  $q_i$  er da:

$$\eta_{i\alpha} = A_{i\alpha} e^{-i\omega_\alpha t} = C_\alpha \Delta_{i\alpha} e^{-i\omega_\alpha t}$$

Generell løsning for den virkelige beregelsen blir dermed:

$$\text{Re } \eta_i(t) = \text{Re} \sum_{\alpha=1}^n \eta_{i\alpha}(t) = \text{Re} \sum_{\alpha=1}^n C_\alpha \Delta_{i\alpha} e^{-i\omega_\alpha t}$$

>: tidsvariasjonen av  $\eta_i$  er en superposisjon av  $n$  harmoniske svingninger med vilkårlige faser og amplituder men fikserte frekvenser

Skriver løsningen på formen

$$\text{Re } \eta_i(t) = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{i\alpha} \Theta_\alpha(t) \quad ; \quad \Theta_\alpha(t) = \text{Re}[C_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}]$$

Har her innført nye uavhengige koordinater  $\Theta_\alpha$ . Vi skal se at beveg.lign. for  $\Theta_\alpha$  ikke er koblete:

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

Kaller  $\Theta_\alpha$  for systemets normalkoordinater. Systemet oscillerer i normalmode  $\alpha$  med egenfrekvens  $\omega_\alpha$ .

La oss sette inn  $\text{Re}\eta_i(t) = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{i\alpha} \Theta_{\alpha}(t)$  i uttrykkene for kinetisk energi  $T$  og potensiell energi  $V$ :

[Når vi her har tillatt  $\eta_i$  å være kompleks må vi erstatte  $\eta_i, \dot{\eta}_i, \ddot{\eta}_i$  og  $\eta_j, \dot{\eta}_j, \ddot{\eta}_j$  med  $\text{Re}\eta_i, \text{Re}\eta_j, \text{Re}\dot{\eta}_i$  og  $\text{Re}\dot{\eta}_j$  i uttr. for  $T$  og  $V$ .]

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \text{Re}\dot{\eta}_i \text{Re}\dot{\eta}_j$$

$$= \frac{1}{2} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \dot{\Theta}_{\alpha} \Delta_{j\beta} \dot{\Theta}_{\beta} \quad (\text{summekonv.} \Rightarrow \sum_{i,j,\alpha,\beta} \text{ her!})$$

$$V = \frac{1}{2} V_{ij} \text{Re}\eta_i \text{Re}\eta_j$$

$$= \frac{1}{2} V_{ij} \Delta_{i\alpha} \Theta_{\alpha} \Delta_{j\beta} \Theta_{\beta} \quad ( \text{—————} " \text{—————} )$$

Her kan vi i første omgang skrive om uttr. for  $V$  ved å gå tilbake til ligningene s. 96:

$$V_{ij} A_{j\alpha} = \omega_{\alpha}^2 T_{ij} A_{j\alpha} \quad [\text{sum over } j!]$$

$$\Rightarrow V_{ij} C_{\alpha} \Delta_{j\alpha} = \omega_{\alpha}^2 T_{ij} C_{\alpha} \Delta_{j\alpha} \quad [\text{NB: Ikke sum over } \alpha \text{ her!!}]$$

$$\Rightarrow V_{ij} \Delta_{j\alpha} = \omega_{\alpha}^2 T_{ij} \Delta_{j\alpha} \quad [ \text{—————} " \text{—————} ]$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \underbrace{V_{ij} \Delta_{j\beta}} \Delta_{i\alpha} \Theta_{\alpha} \Theta_{\beta} \quad [\text{sum over alle fire her!}]$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\omega_{\beta}^2 T_{ij} \Delta_{j\beta}} \Delta_{i\alpha} \Theta_{\alpha} \Theta_{\beta} \quad [ \text{—————} " \text{—————} ]$$

$$= \frac{1}{2} \omega_{\beta}^2 T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta} \Theta_{\alpha} \Theta_{\beta} \quad [ \text{—————} " \text{—————} ]$$

mens  $T$  altså er

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta} \dot{\Theta}_{\alpha} \dot{\Theta}_{\beta} \quad [ \text{—————} " \text{—————} ]$$

For å komme videre, må vi se hva vi kan gjøre med faktoren

$$\sum_{i,j=1}^n T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta}$$

som opptrer i både  $T$  og  $V$ . La oss nok en gang gå tilbake til lign. s. 96:

$$\sum_{j=1}^n (V_{ij} - \omega_\alpha^2 T_{ij}) A_{j\alpha} = 0$$

Bruker igjen  $A_{j\alpha} = C_\alpha \Delta_{j\alpha}$  og skriver denne lign. for  $\alpha$  og  $\beta$ :

$$\sum_j V_{ij} \Delta_{j\alpha} = \omega_\alpha^2 \sum_j T_{ij} \Delta_{j\alpha} \quad (1)$$

$$\sum_j V_{ij} \Delta_{j\beta} = \omega_\beta^2 \sum_j T_{ij} \Delta_{j\beta} \quad (2)$$

Multipliserer (2) med  $\sum_i \Delta_{i\alpha}$  og får

$$\sum_{ij} \Delta_{i\alpha} V_{ij} \Delta_{j\beta} = \sum_{ij} \Delta_{i\alpha} \omega_\beta^2 T_{ij} \Delta_{j\beta} \quad (2')$$

I lign. (1) lar vi først  $i$  og  $j$  bytte roller, slik at vi betrakter

$$\sum_i V_{ji} \Delta_{i\alpha} = \omega_\alpha^2 \sum_i T_{ji} \Delta_{i\alpha}$$

Pga. symmetri kan vi her la  $V_{ji} \rightarrow V_{ij}$  og  $T_{ji} \rightarrow T_{ij}$  før vi endelig multipliserer med  $\sum_j \Delta_{j\beta}$ :

$$\sum_{ij} \Delta_{i\alpha} V_{ij} \Delta_{j\beta} = \sum_{ij} \Delta_{i\alpha} \omega_\alpha^2 T_{ij} \Delta_{j\beta} \quad (1')$$

Subtraherer så (2') fra (1'):

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \sum_{ij} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta} = 0$$

Dermed er det umiddelbart opplagt at hvis  $\omega_\alpha \neq \omega_\beta$  så blir

$$\sum_{ij} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta} = 0$$



Hvis derimot  $\alpha = \beta$ , blir  $(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) = (\omega_\alpha^2 - \omega_\alpha^2) = 0$ , mens

$$\sum_{ij} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\alpha} \neq 0$$

Slik vi definerte  $\Delta_{i\alpha}$ , som minoren  $(i, \alpha)$  til  $|V - \omega_\alpha^2 \Pi|$ , har vi strengt tatt ikke frihet til å velge en bestemt verdi for  $\sum_{ij} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\alpha}$ . La oss imidlertid "moderere" oss litt og heller si at  $\Delta_{i\alpha}$  er proporsjonal med minoren til  $|V - \omega_\alpha^2 \Pi|$ . Vi viste jo på s. 97 at  $A_{i\alpha}$  er prop. med minoren, med (kompleks) prop. konst.  $C_\alpha$ . Det skulle bli akkurat like bra å sette

$$A_{i\alpha} = C'_\alpha \Delta_{i\alpha},$$

nå med nye prop. konst.  $C'_\alpha$ , og  $\Delta_{i\alpha}$  bare proporsjonal med minoren til  $|V - \omega_\alpha^2 \Pi|$ . Hva er så poenget med dette? Jo, nå har vi frihet til å velge en bestemt verdi for  $\sum_{ij} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\alpha}$ ! M.a.o., vi kan fritt velge normeringen av  $\Delta_{i\alpha}$ .

Ved å velge  $\sum_{ij} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\alpha} = 1$ , kan vi dermed sette:

$$\sum_{ij} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

Dette ble mye skrik og bare litt ull, men nå er vi i hvert fall i stand til å forenkle  $T$  og  $V$  på s. 99:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \underbrace{\sum_{ij} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta}}_{\delta_{\alpha\beta}} \dot{\Theta}_\alpha \dot{\Theta}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \dot{\Theta}_\alpha^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \underbrace{\sum_{ij} T_{ij} \Delta_{i\alpha} \Delta_{j\beta}}_{\delta_{\alpha\beta}} \omega_\beta^2 \Theta_\alpha \Theta_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2$$

Kan da skrive ned Lagrangefunksjonen med normalkoordinatene som uavhengige variable:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{\Theta}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha}^2)$$

$$\text{Lagranges ligninger: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta_{\alpha}} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_{\alpha}} = \dot{\Theta}_{\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_{\alpha}} = \ddot{\Theta}_{\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial \Theta_{\alpha}} = -\omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\Theta}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha} = 0} \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

som skulle vises (se s. 98) !

Kommentarer:

- Ingen kobling mellom ligningene for ulike normale moder, som derfor kan sies å være ortogonale.
- Ser at def. s. 98,  $\Theta_{\alpha}(t) = \text{Re}[C_{\alpha} e^{-i\omega_{\alpha} t}]$ , er konsistent med bereg. lign. for  $\Theta_{\alpha}$ .
- Trenger  $2n$  initialbetingelser for å bestemme en fullstendig løsning, dvs. for å fastlegge amplitudene  $|C_{\alpha}|$  og fasene  $\varphi_{\alpha}$  i integrasjonskonstantene  $C_{\alpha} = |C_{\alpha}| \exp(i\varphi_{\alpha})$ .
- Med to eller flere sammenfallende  $\omega_{\alpha}$  (dvs. degenerasjon) blir framgangsmåten noe modifisert.

— . —

Ser nå på et par eksempler.

Eks.1: Partikkel som oscillerer i rommet, påvirket av et potensial  $V = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2)$

---

Kin. energi:  $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (m \dot{x}_i^2 - k_i x_i^2)$$

$$\Rightarrow \text{Bereg. lign.: } m \ddot{x}_i + k_i x_i = 0 \quad i=1,2,3 \quad (\text{ikke sum her!})$$

Ansats:  $x_i = A_i e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow (-m\omega^2 + k_i) A_i = 0 \quad i=1,2,3$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} k_1 - m\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2)(k_3 - m\omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}$$

Sammenligning med formalismen på foregående sider:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}k_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}k_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}k_3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m \end{pmatrix}$$

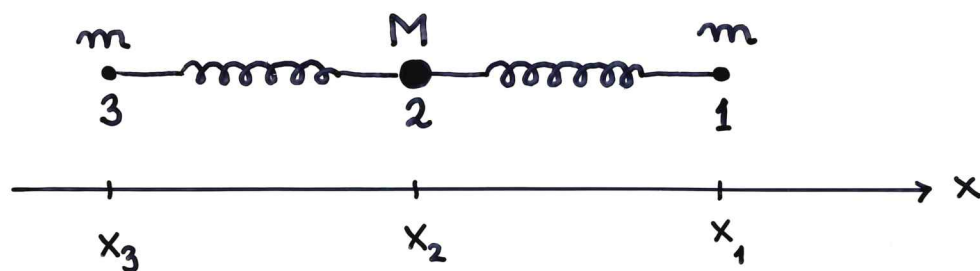
$$V - \omega_a^2 T = \begin{pmatrix} k_1 - m\omega_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 - m\omega_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 - m\omega_a^2 \end{pmatrix}$$

De kartesiske koordinatene  $x_i$  er i dette eksemplet normalkoordinat.  
med bereg. lign.  $\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0$  ;  $\omega_i^2 = k_i/m$

Med sentralfelt,  $V = V(r)$ , blir  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ , dvs.  $V = \frac{1}{2}kr^2$ . I det tilfellet blir de tre røttene degenererte:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{k/m}$ .



Eks. 2: Fri vibrasjoner av lineært symmetrisk treatomig molekyl



Eksempel:



Likevektsavstander:  $x_{01} - x_{02} = x_{02} - x_{03} = b$

Utsving fra likevekt:  $\eta_i = x_i - x_{0i}$ ,  $i=1,2,3$

Antar kun nærmeste nabo vekselvirkning samt harmonisk potensial

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \frac{1}{2} k [(x_1 - x_2) - b]^2 + \frac{1}{2} k [(x_2 - x_3) - b]^2 \\ &= \frac{1}{2} k (\eta_1 - \eta_2)^2 + \frac{1}{2} k (\eta_2 - \eta_3)^2 \end{aligned}$$

Kinetisk energi:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2} M \dot{\eta}_2^2 \end{aligned}$$

Lagrangefunksjon:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2} M \dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2} k (\eta_1 - \eta_2)^2 - \frac{1}{2} k (\eta_2 - \eta_3)^2$$

Forenkling mulig ved å benytte at bevegelsen av CM er upåvirket av vibrasjoner i molekylet. Anta CM i ro i origo

$$\Rightarrow m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0$$

$$\Rightarrow m(\eta_1 + \eta_3) + M\eta_2 = 0$$

Definerer nye uavhengige koordinater:

$$Q_a = \eta_1 + \eta_3, \quad Q_s = \eta_1 - \eta_3$$

$$\Rightarrow \eta_1 = \frac{1}{2}(Q_a + Q_s), \quad \eta_3 = \frac{1}{2}(Q_a - Q_s)$$

og fra lign. for CM (nederst s. 104):  $\eta_2 = -\frac{m}{M}(\eta_1 + \eta_3) = -\frac{m}{M} Q_a$

Setter inn i L:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{4}(\dot{Q}_a + \dot{Q}_s)^2 + \frac{1}{2}m \cdot \frac{1}{4}(\dot{Q}_a - \dot{Q}_s)^2 + \frac{1}{2}M \cdot \frac{m^2}{M^2} \dot{Q}_a^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}k \left[ \frac{1}{2}(Q_a + Q_s) + \frac{m}{M} Q_a \right]^2 - \frac{1}{2}k \left[ -\frac{m}{M} Q_a - \frac{1}{2}(Q_a - Q_s) \right]^2 \\ &= \frac{m}{4} \left( 1 + \frac{2m}{M} \right) \dot{Q}_a^2 + \frac{m}{4} \dot{Q}_s^2 - \frac{1}{2}k \left\{ \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{m}{M} \right) Q_a + \frac{1}{2} Q_s \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{m}{M} \right) Q_a - \frac{1}{2} Q_s \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Ser at leddene  $\sim Q_a \cdot Q_s$  kansellerer. Innfører  $\mu = M + 2m$ , dvs. molekylets totale masse. Dermed er  $1 + 2m/M = \mu/M$ .

Vi får:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{4} \frac{\mu}{M} \dot{Q}_a^2 + \frac{m}{4} \dot{Q}_s^2 - \frac{1}{2}k \left\{ 2 \cdot \left( \frac{\mu}{2M} \right)^2 Q_a^2 + 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 Q_s^2 \right\} \\ &= \frac{m}{4} \left[ \dot{Q}_s^2 - \frac{k}{m} Q_s^2 + \frac{\mu}{M} \dot{Q}_a^2 - \frac{k}{m} \frac{\mu^2}{M^2} Q_a^2 \right] \end{aligned}$$

M.a.o.:  $Q_a$  og  $Q_s$  er normalkoordinater (se s. 102)

Får L på "standardform" ved å innføre

$$\Theta_s = \sqrt{\frac{m}{2}} Q_s, \quad \Theta_a = \sqrt{\frac{m\mu}{2M}} Q_a$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \left[ \dot{H}_s^2 - \frac{k}{m} H_s^2 + \dot{H}_a^2 - \frac{k\mu}{mM} H_a^2 \right]$$

Samme form som på s. 102, og vi kan umiddelbart skrive ned systemets to egenfrekvenser:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k\mu}{mM}}$$

La oss gå tilbake til  $V(\eta_i)$  og  $T(\dot{\eta}_i)$  og bestemme egenfrekvensene ved å løse den sekulære ligningen

$$|V - \omega^2 \Pi| = 0$$

Her er elementene  $V_{ij}$  og  $T_{ij}$  i hvr.  $V$  og  $\Pi$  bestemt ved

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 V_{ij} \eta_i \eta_j$$

Sammenligning med uttr. for  $V$  og  $T$  på s. 104 gir

$$V = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$|V - \omega^2 \Pi| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (k - \omega^2 m) \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 M & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -k & -k \\ 0 & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (k - \omega^2 m) \left[ (2k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2 \right] + k(-k)(k - \omega^2 m) = 0$$



$$\Rightarrow (k - \omega^2 m) (2k^2 - 2km\omega^2 - kM\omega^2 + mM\omega^4 - k^2 - k^2) = 0$$

$$\Rightarrow (k - \omega^2 m) \omega^2 \underbrace{(-k(2m+M) + mM\omega^2)}_{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 (k - \omega^2 m) (k\mu - \omega^2 m M) = 0$$

Løsninger:  $\omega_1 = 0$

$$\omega_2 \equiv \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_3 \equiv \omega_a = \sqrt{\frac{k\mu}{mM}}$$

Her hadde vi ikke gjort noen antagelser om CM i ro. Fant da løsningen  $\omega_1 = 0$ , som tilsvarer uniform translasjon av hele molekylet. Ser at  $\omega_2$  og  $\omega_3$  er de samme som vi fant ved å uttrykke  $L$  på standardform.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Uten antagelse om CM i ro: } L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 (\dot{\Theta}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 \Theta_{\alpha}^2) \\ \text{Ber.lign. for } \alpha=1 \text{ } (\omega_1=0): \partial L / \partial \dot{\Theta}_1 = \dot{\Theta}_1, \quad \partial L / \partial \Theta_1 = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_1} = \ddot{\Theta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\Theta}_1 = \text{konst.}; \quad \Theta_1 \sim x_1 + x_2 + x_3 \end{array} \right]$$

Symmetrisk mode:  $C^{+2\delta}$  i ro mens de to  $O^{-\delta}$  oscillerer i motfase

Antisymm. mode:  $C^{+2\delta}$  oscillerer i motfase med de to  $O^{-\delta}$

|    |                       |                       |                       |             |
|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|
| 1: | $\bullet \rightarrow$ | $\bullet \rightarrow$ | $\bullet \rightarrow$ | (transl.)   |
| 2: | $\bullet \rightarrow$ | $\bullet$             | $\bullet \leftarrow$  | (symm.)     |
| 3: | $\bullet \rightarrow$ | $\bullet \leftarrow$  | $\bullet \rightarrow$ | (antisymm.) |

Mer om dette i ei øving!

# KAP. 7: SPESIELL RELATIVITETSTEORI

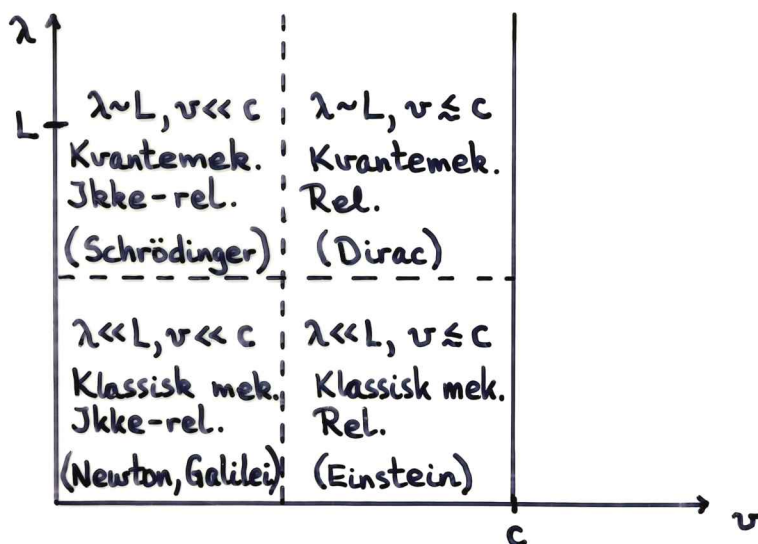
## 1. Innledning

Anta:  $L$  = typisk lineær utstrekning av systemet

$\lambda = h/p$  = de Broglie bølgelengde for et legeme i systemet med impuls  $p$  ( $h$  = Plancks konstant)

$v$  = typisk hastighet til legeme i systemet

$c$  = lyshastigheten



Skal her se nærmere på systemer med  $\lambda \ll L$  og  $v \lesssim c$ , som beskrives med Einsteins spesielle relativitetsteori.

[Generell relativitetsteori: gravitasjon, akselererte ref. systemer; også Einstein!]

Skal ikke gå særlig inn på:

- tidlige eksperimenter (Michelson-Morley etc.)
- filosofiske betraktninger
- tilsynelatende paradokser

Målet er derimot:

- å benytte formalisme og begrepsapparat fra klassisk mekanikk til å beskrive den spesielle relativitetsteorien

### Kort rekapitulering:

Inertialsystem: referansesystem der Newtons lover gjelder  

$$[\vec{F} = d\vec{p}/dt]$$

Galileitransformasjonen:

anta to inertialsystemer  $S'$  og  $S$ , der  $S'$  beveger seg med hastighet  $\vec{v}$  relativt til  $S$ . Et legemes koordinater  $\vec{r}'$  og  $\vec{r}$  og tidspunkter  $t'$  og  $t$  observert i hhv.  $S'$  og  $S$  er da relatert ved  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} \cdot t$ ,  $t' = t$

Problem:

Galileitransf. forutsier forskjellig lyshastighet i  $S'$  og  $S$ :

$$c' = c - v \quad [c' = dr'/dt = dr/dt - v = c - v].$$

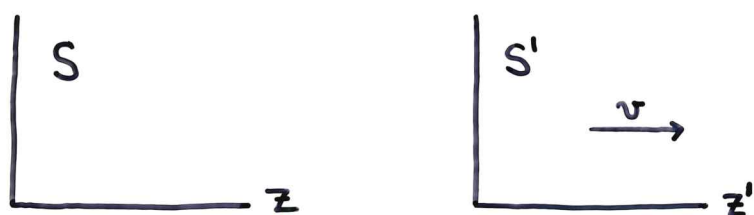
Eksperimentelt er lyshastigheten den samme i  $S'$  og  $S$ , dvs.  $c' = c$ , uavh. av relativ hastighet  $v$  [Michelson-Morley, Kennedy-Thorndike, Alväger et al.]

⇒ Einsteins to grunnleggende postulater:

1. Fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer ("relativitetsprinsippet"; også tilfredsstillt i Newton-mekanikk)
2. Lyshastigheten i vakuum har samme konstante verdi i alle inertialsystemer og er uavh. av lyskildens bevegelse (skiller relativitetsteorier fra andre teorier)



## 2. Lorentztransformasjonen



To inertialsystemer  $S, S'$ .  $S'$  beveger seg med hastighet  $\vec{v}$  relativt til  $S$ . Antar felles origo ved  $t = t' = 0$ , dessuten  $\vec{v}$  parallell med  $z$ -aksen.

Lorentztransf.:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right)$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c$$

Invers transf. :  $v \rightarrow -v$

Ser at transf.lign. er lineære.

Lorentztransf. gjør at lyshastigheten  $c$  er invariant, dvs. den samme sett ifra de to systemene  $S$  og  $S'$ . La oss vise dette:

Anta punktkilde i origo i  $S'$  som emitterer en lysbølge ved  $t=0$ . Ligning for lysfronten:

$$r' = ct'$$

$$\therefore (r')^2 = c^2(t')^2$$

$$\therefore (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2$$

Skal se at vi får samme ligning for lysfronten i  $S$ :

$$\begin{aligned}
x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2 - c^2 \gamma^2 \left(t - \frac{v}{c^2} z\right)^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - z^2 + \gamma^2 (z^2 - 2vzt + v^2 t^2) - c^2 \gamma^2 \left(t^2 - \frac{2v}{c^2} zt + \frac{v^2}{c^4} z^2\right) \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - z^2 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1-\beta^2} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)}_{=0} - z \underbrace{(2v\gamma^2 t - 2v\gamma^2 t)}_{=0} + \gamma^2 t^2 (v^2 - c^2) \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \underbrace{\gamma^2 (1 - v^2/c^2)}_{=1} \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2
\end{aligned}$$

Dvs: Hvis  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ , så er også  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$

Dvs: Lysfronten beveger seg med hastighet  $c$  i både  $S'$  og  $S$ .

For  $v \ll c$  :  $x' = x$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z - vt$ ,  $t' = t$

$\therefore$  Lorentztransf.  $\xrightarrow{v \ll c}$  Galileitransf.

Invers transformasjon:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \gamma(z' + vt'), \quad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2} z')$$

[Opplagt! Må kunne la  $v \rightarrow -v$  ettersom  $S$  beveger seg med hastighet  $-v$  relativt til  $S'$ . Finnes også ved å løse ut for  $z$  og  $t$  fra transf.lign. for  $z'$  og  $t'$ .]

Vektorform:

$$\vec{r}' = \vec{r} + [\gamma(z - vt) - z] \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\text{Da } \vec{v} \cdot \vec{r} = v z, \text{ blir } z = \frac{1}{v} \vec{v} \cdot \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + [(\gamma - 1) \frac{1}{v} \vec{v} \cdot \vec{r} - \gamma vt] \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma ct \vec{\beta} \quad (\vec{\beta} = \vec{v}/c)$$

Tilsvarende for  $t'$ :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t - \frac{\gamma v}{c^2} z = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{r} \\ &= \gamma t - \frac{\gamma}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{r} = \gamma t - \frac{\gamma}{c} \vec{\beta} \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Da Lorentztransf. er lineær, kan vi bruke ideer og formelapparat fra kap. 4.

Innfører en "4. dimensjon" med variabelen

$$x_4 = ict$$

vi innfører 4-dimensjonalt Minkowskirom med akser

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$$

Størrelsen som vi beregnet på s. III blir da:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu} x_{\mu} \equiv x_{\mu} x_{\mu}$$

(med summekonvensjon: sum over repeterte indekser)

Vektor i Minkowskirommet: 4-vektor

Standard notasjon i den forbindelse:

greske indekser for 4-vektorer ( $\alpha, \beta, \mu, \dots$ )

romanske indekser for 3-vektorer ( $i, j, k, \dots$ )

Kan nå uttrykke invarians av lyshastigheten ved å si at

$$x_{\mu} x_{\mu} \text{ er en invariant}$$

M.a.o:

Normen av "posisjonsvektoren" i Minkowskirommet ("4-rommet") er konstant under en Lorentztransformasjon.



Fra kap. 4-2 (s.64-65): en lineær transformasjon som ikke endrer vektorens lengde (størrelse, norm) er en såkalt ortogonal transformasjon

⇒ Lorentztransformasjonen er en ortogonal transf. i Minkowskirommet

Lorentztransf. på matriseform:

$$X' = \mathbb{L} X \quad \text{evt.} \quad x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu$$

Vi velgte relativ hastighet  $v$  langs  $z$ -aksen:  $\vec{v} = v \hat{z} = v \hat{x}_3$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{transformasjonsmatrisen}$$

[Hvis vi har  $\vec{v}$  i vilkårlig retning, må vi gå tilbake til de generelle vektoruttrykkene på s. 111 og 112:

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{r}) \vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma c t \vec{\beta} \quad (\vec{\beta} = \vec{v}/c)$$

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c} \vec{\beta} \cdot \vec{r}$$

$$\Rightarrow x'_j = x_j + (\gamma - 1) \frac{(\beta_k x_k) \beta_j}{\beta^2} + i \gamma x_4 \beta_j$$

$$x'_4 = \gamma x_4 - i \gamma \beta_k x_k \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

$$\Rightarrow L_{jk} = \delta_{jk} + (\gamma - 1) \frac{\beta_j \beta_k}{\beta^2} \quad ; \quad L_{j4} = i \gamma \beta_j$$

$$L_{4k} = -i \gamma \beta_k \quad ; \quad L_{44} = \gamma$$

]

Fra kap. 4 har vi også:

For ortogonal matrise gjelder  $L^{-1} = \tilde{L}$   
 $\uparrow$  (transponert av  $L$ )

Invers Lorentztransformasjon kan derfor skrives slik:

$$x_\mu = L^{-1}_{\mu\nu} x'_\nu = \tilde{L}_{\mu\nu} x'_\nu = L_{\nu\mu} x'_\nu$$

Kan umiddelbart skrive ned den inverse transf. matrisen:

$$L^{-1} = \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{for } v \text{ langs } x_3)$$

∴ invers Lorentztransf. tilsvarer å la  $v \rightarrow -v$  (som vi har sett før).

Fra eksemplet s. 65 har vi at matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

representerer rotasjon en vinkel  $\varphi$  i et todim. plan.

Dermed kan Lorentztransf. oppfattes som en rotasjon i  $x_3x_4$ -planet gjennom en imaginær vinkel  $\varphi$  bestemt ved

$$\begin{aligned} \gamma &= \cos\varphi \\ i\beta\gamma &= \sin\varphi \end{aligned}$$

$$( \text{Vi har } \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1, \text{ OK!} )$$

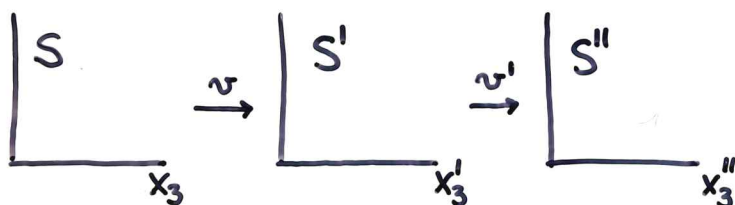
Alternativt kan vi innføre en reell vinkel  $\Psi$ :  $\varphi = i\Psi$

$$\Rightarrow \gamma = \cos\varphi = \cos i\Psi = \frac{1}{2}(e^{-\Psi} + e^{\Psi}) = \cosh\Psi$$

$$i\beta\gamma = \sin\varphi = \sin i\Psi = \frac{1}{2i}(e^{-\Psi} - e^{\Psi}) = i \cdot \frac{1}{2}(e^{\Psi} - e^{-\Psi}) = i \sinh\Psi$$

Hva er poenget med dette? Kan brukes til å forenkle sammensatte transformasjoner!

Eks: Einsteins addisjonsformel



$$x' = L x, \quad x'' = L' x', \quad x'' = L'' x$$

$$\Rightarrow L'' = L' L$$

Kan nå multiplisere  $L'$  og  $L$  og finne at  $L''$  tilsvarer rotasjonen  $\varphi'' = \varphi' + \varphi$ . Ses vel også direkte: Da  $L'$  og  $L$  begge tilsvarer rotasjon i det samme planet, må vi ha  $\varphi'' = \varphi' + \varphi$ .

Se nå på  $\tan \varphi'' = \frac{\sin \varphi''}{\cos \varphi''} = \frac{i\beta'' \gamma}{\gamma} = i\beta''$ :

$$\begin{aligned} \tan \varphi'' &= \tan(\varphi' + \varphi) = \frac{\sin(\varphi' + \varphi)}{\cos(\varphi' + \varphi)} = \frac{\sin \varphi' \cos \varphi + \cos \varphi' \sin \varphi}{\cos \varphi' \cos \varphi - \sin \varphi' \sin \varphi} \\ &= \frac{\tan \varphi' + \tan \varphi}{1 - \tan \varphi \tan \varphi'} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i\beta'' = i \frac{\beta' + \beta}{1 + \beta\beta'}$$

$$\Rightarrow \boxed{v'' = \frac{v' + v}{1 + vv'/c^2}} \quad \text{som er Einsteins addisjonsformel}$$

Ser at

1)  $v'' \neq v + v'$ , som ville ha vært det ikke-rel. resultatet

2)  $v'' < c$ , selv for  $v \lesssim c$  og  $v' \lesssim c$



Generell transf. i Minkowskirommet (som bevarer  $c$ ):

$$x' = \mathbb{L} x + a \quad (\text{Poincaré transf. / Inhomogen Lorentztransf.})$$

Herer

$\mathbb{L}$  = ortogonal matrise

$a$  = 4-dim. translasjonsvektor ( $\therefore$  skifte av origo:  
romlig translasjon + omdefinering av nullpunkt for tid)

$$\text{Ortogonalitet: } \mathbb{L} \tilde{\mathbb{L}} = \tilde{\mathbb{L}} \mathbb{L} = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$  10 betingelser for elementene i  $\mathbb{L}$

$\Rightarrow 16 - 10 = 6$  uavhengige elementer i  $\mathbb{L}$

Med 4 uavh. komponenter i  $a$  fås totalt  $6 + 4 = 10$  uavh. elementer i en Poincaré-transformasjon.

Homogen Lorentztransf.:  $x' = \mathbb{L} x$ ; 6 uavh. elementer

Ser kun på homogene Lorentztransf. i fortsettelsen.

$$\begin{aligned} \text{Ortogonal } \mathbb{L} &\Rightarrow \mathbb{1} = \mathbb{L} \tilde{\mathbb{L}} \Rightarrow 1 = |\mathbb{1}| = |\mathbb{L} \tilde{\mathbb{L}}| = |\mathbb{L}| \cdot |\tilde{\mathbb{L}}| = |\mathbb{L}|^2 \\ &\Rightarrow |\mathbb{L}| = \pm 1 \quad (\text{jfr. kap. 4}) \end{aligned}$$

$|\mathbb{L}| = +1$ : proper Lorentztransf.; kan gå kontinuerlig over i identitetstranf.  $\mathbb{1}$

$|\mathbb{L}| = -1$ : improper Lorentztransf.; fås ved inversjon av romaksene men ikke tidsaksen

$$\text{Refleksjon av romakser og tidsakse: } \mathbb{L} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbb{L}| = +1$$

Skal se at vi må ha  $L_{44}^2 \geq 1$  :

$$\mathbb{L} \tilde{\mathbb{L}} = 1 \Rightarrow L_{\mu\alpha} \tilde{L}_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \Rightarrow L_{\mu\alpha} L_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow L_{4\alpha} L_{4\alpha} = 1 \Rightarrow L_{44}^2 + L_{4j} L_{4j} = 1$$

Da  $L_{4j}$  forbinder imaginær koordinat  $x_4'$  med reell romkoord.  $x_j$ , må vi ha  $L_{4j} L_{4j} \leq 0$  (og reell)

$$\Rightarrow L_{44}^2 = 1 - L_{4j} L_{4j} \geq 1 \quad (\text{og reell})$$

$L_{44} \leq -1$  : "ikke-ortokron", involverer tidsinversjon

$L_{44} \geq 1$  : ortokron

$\Rightarrow$  Den eneste typen Lorentztransf. som kan gå kontinuerlig over i  $\mathbb{1}$  er proper og ortokron, dvs med  $|\mathbb{L}| = +1$  og  $L_{44} \geq 1$ . Kalles gjerne begrenset Lorentztransf.

Reduserer seg til Galileitransf. for  $v \ll c$ .

### 3. Litt om reell metrikk

[Ikke direkte eksamensstoff, men dukker opp senere, f.eks i feltteori]

Riemannrom: koordinater  $x_\mu$  (reelle eller komplekse)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \text{kvadr. av lengden av}$$

veielement i dette rommet

Metrisk tensor:  $g$  ; med matriseelementer  $g_{\mu\nu}$

Kovariante vektorkomponenter:  $x_\mu$

Kontravariante ——— " ——— :  $x^\mu$

Den metriske tensoren  $g$  gir sammenhengen mellom  $x_\mu$  og  $x^\nu$  :

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu})$$

For veielementet kan vi da skrive:

$$ds^2 = dx_\mu g_{\mu\nu} dx_\nu = dx_\mu dx^\mu$$

>: hvis  $ds^2$  er invariant, er  $dx_\mu dx^\mu$  invariant

For det komplekse Minkowskiorommet hadde vi  $x_4 = ict$ . Da

braker vi  $g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

og får  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ , som vi har sett er en invariant. I dette tilfellet blir  $x_\mu = x^\mu$ , og en har  $\text{Tr} g = +4$ .  
 [Tr = "Trace" = "Spor" =  $\sum \{\text{diagonalelementene}\}$  ]



La oss se på et par alternativer til det komplekse Minkowskirommet.

A)  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$

For å få  $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$  invariant, kan vi velge følgende metrikke:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Da får vi  $dx_0 = g_{0\nu} dx^\nu = g_{00} dx^0 = -c dt$

$$dx_1 = g_{1\nu} dx^\nu = g_{11} dx^1 = dx$$

$$dx_2 = g_{2\nu} dx^\nu = g_{22} dx^2 = dy$$

$$dx_3 = g_{3\nu} dx^\nu = g_{33} dx^3 = dz$$

$$\Rightarrow ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{invariant!})$$

Har i dette tilfellet  $\text{Tr } g = -1 + 1 + 1 + 1 = +2$

B)  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  (som under A)

Velger nå metrikken  $g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Da får vi  $dx_0 = +dx^0 = c dt$

$$dx_1 = -dx^1 = -dx$$

$$dx_2 = -dx^2 = -dy$$

$$dx_3 = -dx^3 = -dz$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{invariant!})$$

Her er  $\text{Tr } g = -2$

Ulike valg brukes ulike steder i litteraturen.

#### 4. Kovariant firedimensjonal formulering

[NB! Uttrykket "kovariant" har her ingenting å gjøre med distinksjonen mellom ulike vektorkomponenter innført på s. 118 !!]

Har erstattet den feilaktige Galileitransf. med Lorentztransf.  
Ønsker nå å kontrollere fysikkens lover og se om de har samme form i alle inertialsystemer.

⇒ Vi må sjekke om ligningene er invariante i form under en Lorentztransformasjon

[Kovariant  $\equiv$  Forminvariant i denne forbindelse]

Ligningene som beskriver ulike fysiske lover vil angi sammenhengen mellom skalarer, vektorer eller tensorer (matriser).

Da skalarer og vektorer er spesialtilfeller av tensorer, må vi generelt kreve kovarians av tensorligninger, dvs:

$$\text{Hvis } C_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} \text{ må også } C'_{\mu\nu} = D'_{\mu\nu}$$

etter en Lorentztransformasjon

Starter med å betrakte et punkt i Minkowskirommet med koordinater  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . En partikkel som beveger seg i rommet vil beskrives av en "vei" i Minkowskirommet

 "world line"  
egenlinje

Liten endring av koordinatene langs egenlinjen beskrives med 4-vektoren  $dx_\mu$ . Har sett at  $dx_\mu dx_\mu$  er en Lorentz invariant (dvs. like stor målt i alle inertialsystemer).

Definerer egentiden  $\tau$  :  $dx_\mu dx_\mu \equiv -c^2 d\tau^2$

Legger nå inertialsystemet  $S'$  "på" partikkelen som beveger seg, dvs. partikkelen er i ro i  $S'$ . Får da

$$dx'_\mu = (0, 0, 0, ic dt')$$

$$\Rightarrow dx'_\mu dx'_\mu = -c^2 dt'^2$$

$$\Rightarrow d\tau = dt'$$

dvs.  $d\tau$  = tiden som måles med en klokke som beveger seg med partikkelen (derav "egentid")

Sett fra inertialsystemet  $S$  beveger partikkelen seg med hastighet  $u$  ( $u^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2$ ). Her er

$$dx_\mu = (dx, dy, dz, ic dt)$$

$$\Rightarrow dx_\mu dx_\mu = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

$$\Rightarrow -c^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = u^2 - c^2$$

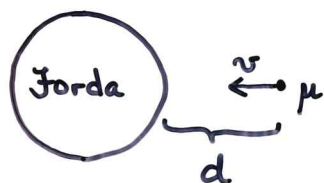
$$\Rightarrow d\tau^2 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dt^2$$

$$\Rightarrow dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} > d\tau$$

dvs. klokke i  $S$  (der partikkelen beveger seg) viser en tid  $dt$  som er lengre enn tida  $d\tau$  som vises på klokke i  $S'$  (der partikkelen er i ro). "Tidsdilatasjon" !



# Eks.1: Levetid for $\mu$ -mesoner (myoner) i atmosfæren



Dannes i ytre atmosfære, ved  $d \sim 6 \text{ km}$  fra jorda, ved kosmisk stråling.

Levetid i myonets hvilesystem:  $\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

Hastighet i forhold til jorda:  $v = 2.994 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Ikkerelativistisk ville et myon tilbakelegge en avstand

$l_0 = v\tau \approx 600 \text{ m} \Rightarrow$  nesten ingen myoner skulle nå fram til oss; ikke i samsvar med målinger ved jordoverflaten hvor mange myoner detekteres.

Relativistisk betraktning må til!

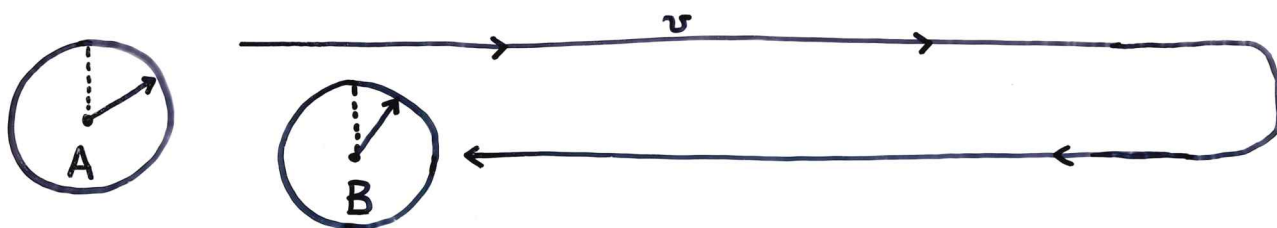
(a) Sett fra jorda: Myonets levetid blir  $t = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 32 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ , og med hastigheten  $v = 2.994 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  kan et typisk myon tilbakelegge en avstand  $l = vt \approx 9.6 \text{ km} > d$   
 $\Rightarrow$  de fleste myoner når fram til jorda!

(b) Sett fra myonets hvilesystem: Jorda beveger seg med hastigheten  $v = 2.994 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  mot myonet. Lorentztransf.  $z' = \gamma(z - vt)$  gir sammenhengen mellom avstand  $z'$  observert fra jorda og avstand  $z$  og tid  $t$  observert fra myonet. Myonet dannes ved  $t=0$ . Avstand til jorda, sett fra myonet, blir dermed  
 $z = z' \sqrt{1-\beta^2} \approx 375 \text{ m}$  (med  $z' = 6 \text{ km}$ ). Det betyr at jorda når fram til myonet etter en tid  $t = z/v \approx 1.25 \cdot 10^{-6} \text{ s} < \tau$   
 $\Rightarrow$  jorda når fram til myonet i god tid før det "dør"!

[Eksperiment, CERN 1975: Bailey et al., Physics Letters **55B**, 420 (1975)]



# Tvillingparadokset



B reiser vekk fra A, snur, og kommer tilbake.

Klokke A viser at B har vært borte en tid  $T$ , mens klokke B viser at B har vært borte en tid  $T/\gamma$ .

Men: Kan ikke B oppfatte situasjonen slik at det er han som er i ro, mens A reiser vekk og kommer tilbake?

J såfall ville B forvente at A har målt en tid  $T/\gamma^2$  på sin klokke.

Nei! Situasjonen er ikke symmetrisk. Asymmetrien kommer av at B snur. Han endrer sin hastighet fra  $v$  til  $-v$  og utsettes dermed for en akselerasjon (som han selv kan måle). M.a.o., B skifter fra et inertialsystem til et annet.

Denne asymmetrien kan utledes mer rigorøst ved å betrakte lyssignaler emittert fra A og B med jevne mellomrom (målt på A og B's egne klokker!) og benytte Dopplereffekten: På vei ut mottar både A og B den andres signal med redusert frekvens  $f' = f[(1-\beta)/(1+\beta)]^{1/2}$ . Når B snur, mottar han straks signaler med frekvens  $f'' = f[(1+\beta)/(1-\beta)]^{1/2}$  fra A, men det tar en tid  $L/c$  før A begynner å motta signaler med frekvens  $f''$  fra B!

## Eks.2: Klokke i rute fly rundt jorda

Nøyaktige Cs-klokker plasseres i fly som går rundt jorda.

Tidsdilatasjon målt med en nøyaktighet på ca. 10%

[Hafele og Keating, Science 177, 166 (1972)]

Med  $v \sim 500 \text{ km/t} \sim 140 \text{ m/s}$  blir  $\gamma \approx 1 + 10^{-13}$ . Dermed, med

$\Delta t \approx 11 \text{ timer} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ s}$ , blir  $\Delta\tau = \Delta t(1 - 10^{-13}) = \Delta t - 4 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ .

Dvs: klokke i flyet har saktet seg ca 4 nanosekunder i forhold til ei klokke på jorda.

Vi har sett at  $ds^2 = dx_\mu dx_\mu$  kan være positiv, negativ eller lik null. Sier at en 4-vektor  $x_\mu$  er

|            |                |        |                   |
|------------|----------------|--------|-------------------|
| romrettet  | ("space-like") | dersom | $x_\mu x_\mu > 0$ |
| tidsrettet | ("time-like")  | —" "   | $x_\mu x_\mu < 0$ |
| null       | ("light-like") | —" "   | $x_\mu x_\mu = 0$ |

Hvorfor disse betegnelsene?

Betrakt to "begivenheter" beskrevet ved hhv.  $x_{1\mu} = (\vec{r}_1, ict_1)$  og  $x_{2\mu} = (\vec{r}_2, ict_2)$ . Ser så på differansevektoren

$$X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, ic(t_1 - t_2))$$

med norm

$$X_\mu X_\mu = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$$

Velger koord. system slik at  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  ligger langs  $z$ -aksen.

I et system  $S'$  som beveger seg med hastighet  $v$  langs  $z$ -aksen, blir da  $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}z)$ , og dermed

$$t'_1 - t'_2 = \gamma[t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(z_1 - z_2)] = \frac{\gamma}{c}[c(t_1 - t_2) - \beta(z_1 - z_2)]$$

Hvis  $X_\mu$  er romrettet (eller null), er  $X_\mu X_\mu \geq 0$ , dvs

$$c|t_1 - t_2| \leq |z_1 - z_2|,$$

og vi kan alltid finne en hastighet  $v \leq c$  som gir  $t'_1 - t'_2 = 0$ .

Dvs, det finnes alltid et inertialsystem  $S'$  med hastighet  $v$  i forhold til  $S$ , der de to begivenhetene oppfattes som simultane.

Hvis  $X_\mu$  er tidsrettet, er  $X_\mu X_\mu < 0$ , dvs

$$c|t_1 - t_2| > |z_1 - z_2|,$$

og vi kan ikke finne et inertialsystem  $S'$  der de to begivenhetene oppfattes som simultane.

Altså: Hendelser med romrettet separasjon kan ikke forbindes med et signal som går med lyshastighet  $c$ , m.a.o., de to hendelsene kan ikke influere hverandre. Kan gjøres simultane, så "før" og "etter" er ikke entydig bestemt.

Hendelser med tidsrettet separasjon kan forbindes med signal som går med hastighet  $c$ , så de to hendelsene kan influere hverandre. Nå kan imidlertid hendelsene ikke gjøres simultane (dvs hvis  $t_1 > t_2$  så er også  $t'_1 > t'_2$  i alle inertialsystem  $S'$ ), så "før" og "etter" er entydig bestemt. Kausalitet: Årsak før virkning!



## Firerhastighet

$$u_\mu \equiv dx_\mu / d\tau$$

$u_\mu$  er en 4-vektor da  $dx_\mu$  er en 4-vektor og  $d\tau$  er en (Lorentz invariant) skalar

$$dx_\mu = (dx_i, icdt)$$

$$\Rightarrow u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \gamma \frac{dx_i}{dt} = \gamma v_i$$

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = ic \frac{dt}{d\tau} = ic\gamma$$

$$\Rightarrow u_\mu = \gamma(\vec{v}, ic)$$

Firerhastigheten er tidsrettet:

$$u_\mu u_\mu = \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = \frac{v^2 - c^2}{1 - v^2/c^2} = -c^2 < 0$$

## Firerstrømtetthet

Kontinuitetsligningen :  $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0$

$\vec{j}$  = strømtetthet

$g$  = ladningstetthet

Ved å danne 4-vektoren  $j_\mu = (\vec{j}, icg)$  kan kont.lign. skrives på formen

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu \equiv \partial_\mu j_\mu = 0$$



Ikke wrentet er  $j_\mu$  nettopp 4-vektoren  $g_0 u_\mu$ , der  $g_0$  er ladningstettheten i inertialsystemet hvor ladningene er i ro, og  $u_\mu$  er firer-hastigheten:

$$j_\mu = g_0 u_\mu = (\gamma g_0 \vec{v}, i c \gamma g_0) = (\gamma \vec{v}, i c \gamma) = (\vec{j}, i c \rho)$$

Ladningstettheten  $\rho$  for ladninger i bevegelse blir større enn  $\rho_0$  pga. lengdekontraksjonen:  $\rho = \gamma \rho_0 > \rho_0$

Er så kontinuitetsligningen kovariant ?

Da  $dx_\mu = L'_{\mu\nu} dx'_\nu = \tilde{L}_{\mu\nu} dx'_\nu = L_{\nu\mu} dx'_\nu$ , følger at

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = L_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Dermed transformerer både  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  og  $j_\mu$  på samme måte som  $dx_\mu$  under en Lorentztransformasjon, og  $\partial_\mu j_\mu$  må derfor være en Lorentz invariant skalar.

$\Rightarrow$  Kont.lign. er kovariant !

### Maxwells ligninger og firerpotensial

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad \left( \epsilon_0 = \frac{10^{-7}}{4\pi c^2}, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \right)$$

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{kan skrive } \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

fordi  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$  for vilkårlig vektor  $\vec{A}$

Dermed:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{kan skrive } \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

fordi  $\nabla \times \nabla \chi = 0$  for vilkårlig skalar  $\chi$

Anta vakuum :  $\vec{P} = 0$  og  $\vec{M} = 0$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \left[ \epsilon_0 \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right] = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho / \epsilon_0$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \quad ; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \epsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Identitet:  $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}$$

Maxwells 4 ligninger for  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  er redusert til 2 ligninger for  $\phi$  og  $\vec{A}$ . Fremdeles koblede ligninger.

Lign. for  $\phi$  og  $\vec{A}$  kan "dekobles" ved å utnytte at vi har en viss frihet i valget av  $\phi$  og  $\vec{A}$ :

Da  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , vil  $\vec{B}$  bli uforandret ved transformasjonen

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \quad (\chi = \text{vilkårlig skalar})$$

(husk:  $\nabla \times \nabla \chi = 0$ ), men da  $\vec{E} = -\nabla \phi - \partial \vec{A} / \partial t$ , må vi samtidig foreta transformasjonen

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

for at  $\vec{E}$  også skal forbli uforandret. Denne friheten til å justere potensialene  $\phi$  og  $\vec{A}$  kalles justérinvarians, eller (mer vanlig) "Gaugeinvarians".

Et vanlig valg er å ta en  $\chi$  som oppfyller

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

Dette er såkalt Lorentz gauge og <sup>henger sammen med,</sup> ~~for~~ Lorentzbetingelsen

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

[Dermed: Hvis  $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ , får vi også

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} &= \nabla \cdot (\vec{A} + \nabla \chi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}) \\ &= \underbrace{\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$



Bruker nå Lorentzbetingelsen til å dekode ligningene for  $\Phi$  og  $\vec{A}$ :

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho/\epsilon_0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\rho/\epsilon_0$$

$$\Rightarrow \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \underbrace{\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{=0} \right) = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (2)$$

Nå kan vi innføre firerpotensialet  $A_\mu = (\vec{A}, i \frac{\Phi}{c})$

$$\Rightarrow \text{Lorentzbetingelsen: } \partial_\mu A_\mu = 0$$

$$\text{"Bølgeligningene" (1) og (2): } \square^2 A_\mu = -\mu_0 j_\mu$$

Her er  $\square^2 \equiv \partial_\mu \partial_\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  D'Alemberts operator,

mens firerstrømtettheten  $j_\mu = (\vec{j}, ic\rho)$  ble definert på s.125.

Dermed:  $A_\mu$  transf. som  $j_\mu$ , dvs som  $u_\mu$ , dvs som  $x_\mu$  under en Lorentztransformasjon ( $\square^2$  er en invariant skalar operator!)

$\Rightarrow$  Maxwells elektromagnetiske teori er kovariant, dvs i samsvar med den spesielle relativitetsteorien.

## 5. Relativistisk mekanikk

Newtons lov,  $F = ma$ , invariant under Galileitransf. og ikke under Lorentztransf.

⇒ Vi må finne en generalisering av Newtonmekanikk som

(a) tilfredsstiller kravet om kovarians i spesiell rel.teori, og

(b) reduserer seg til  $\frac{d}{dt}(mv_i) = F_i$  for  $v_i \ll c$

Naturlig forsøk:  $\frac{d}{d\tau}(mu_\mu) = K_\mu$

$m$  = invariant masse

$\tau$  = egentid

$u_\mu$  = firehastighet

$K_\mu$  = Minkowskikraft

$$\left. \begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} d\tau &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} dt = dt \\ \lim_{v \rightarrow 0} u_i &= \lim_{v \rightarrow 0} \gamma v_i = v_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{må kreve } \lim_{v \rightarrow 0} K_i = F_i$$

Braker elektromagnetisk teori som utgangspunkt, fordi

(a) vi har sett at den er kovariant, og

(b) vi kjenner Lorentzkraften  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \nabla \times \vec{A}\right)$$

$$\vec{v} \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$$

$$\Rightarrow F_i = -q\left(\partial_i(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{dA_i}{dt}\right)$$

$$\text{Da } u_\mu A_\mu = \gamma v_i A_i + \gamma ic \frac{i\phi}{c} = \gamma(\vec{v} \cdot \vec{A} - \phi)$$

og  $dt = \gamma d\tau$ , får en

$$\begin{aligned} F_i &= -q\left(-\frac{1}{\gamma} \partial_i(u_\mu A_\mu) + \frac{1}{\gamma} \frac{dA_i}{d\tau}\right) \\ &= \frac{q}{\gamma}\left(\partial_i(u_\mu A_\mu) - \frac{dA_i}{d\tau}\right) \end{aligned}$$

Både  $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$  og  $dA_i$  transf. som romkomponenter  
av en firervektor (mens  $u_\mu A_\mu$  og  $d\tau$  er invariante skalarer)

$$\Rightarrow \text{vi identifiserer } K_i = q\left(\partial_i(u_\mu A_\mu) - \frac{dA_i}{d\tau}\right)$$

$$\Rightarrow K_i = \gamma F_i$$

Minkowskikraften blir dermed:  $K_\mu = q\left(\partial_\mu(u_\nu A_\nu) - \frac{dA_\mu}{d\tau}\right)$   
for kraft på ladede partikler.

Introduserer firerimpulsen  $p_\mu = mu_\mu = (m\gamma\vec{v}, ic\gamma m)$

$$\Rightarrow K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

Med  $\vec{K} = d\vec{p}/d\tau$ ,  $d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$  og  $\vec{K} = \gamma \vec{F}$  får vi

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt \quad \text{også relativistisk!}$$

Hva med  $K_4$ ?

$$u_\mu K_\mu = u_\mu \frac{d}{d\tau}(mu_\mu) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2} m u_\mu u_\mu \right) = - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2} mc^2 \right) = 0$$

[Fra s.125:  $u_\mu u_\mu = -c^2$ ]

$$\Rightarrow u_i K_i + u_4 K_4 = 0$$

$$\Rightarrow \gamma v_i \gamma F_i + ic \gamma K_4 = 0$$

$$\Rightarrow K_4 = \frac{i\gamma}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{Dvs: } K_\mu = \gamma \left( \vec{F}, \frac{i}{c} \vec{F} \cdot \vec{v} \right)$$

Vi har  $dp_4/d\tau = K_4$ ,  $p_4 = mu_4 = icm\gamma$  og  $K_4 = \frac{i}{c} \gamma \vec{F} \cdot \vec{v}$ ,  
og dermed:

$$\frac{d}{d\tau}(icm\gamma) = \frac{i}{c} \gamma \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}(\gamma mc^2) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{d\tau} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad ; \quad E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

[NB: J Goldstein brukes  $T$  istedetfor  $E$ ....]

Altså:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{F} \quad \frac{dE}{d\tau} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad p_\mu = \left( \vec{p}, \frac{iE}{c} \right)}$$

Hvis  $\beta \ll 1$  f.ås  $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{hvileenergi} + \text{kinetisk energi}$

[Ofte brukes  $m_0$  for den invariante massen; vi skriver bare  $m$ .]

Hvis partikkelen er i et ytre felt, må den potensielle energien  $V$  legges til  $E$  for at vi skal oppnå total energi.



Ettersom  $p_\mu = m u_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau}$ , må  $p_\mu$  transformere på samme måte som  $x_\mu$  under en Lorentztransf.

Velger  $v$  langs  $z$ -aksen som vanlig

$$\Rightarrow p' = L p \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = \gamma p_3 + i\beta\gamma p_4 = \gamma \left( p_3 - \frac{\beta}{c} E \right)$$

$$p'_4 = -i\beta\gamma p_3 + \gamma p_4$$

$$\frac{iE'}{c} = -i\beta\gamma p_3 + \gamma \frac{iE}{c}$$

$$\Rightarrow E' = \gamma(E - v p_3)$$

La oss regne ut invarianten  $p_\mu p_\mu$  i partikkelens hvilesystem:

$$p_\mu p_\mu = p^2 - E^2/c^2 = -(mc^2)^2/c^2 = -m^2 c^2$$

(da  $\vec{p} = 0$  og  $\gamma = 1$ )

Men dermed kan vi skrive generelt:

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Et foton har  $m=0$  og dermed  $E=pc$ . Har også  $E=h\nu$ .

$$\Rightarrow pc = h\nu \Rightarrow p \nu \lambda = h\nu \Rightarrow \boxed{p = h/\lambda}$$

$\therefore$  de Broglies formel for bølge-partikkel dualisme

### Eks: Energibevarelse og masseendring

"Før": 
$$\begin{array}{ccc} m & (1) & m & (2) \\ \bullet & & \bullet & \\ \xrightarrow{v} & & \xleftarrow{-v} & \end{array}$$

"Etter": 
$$\begin{array}{c} M \\ \bullet \\ v=0 \end{array}$$

Romlig impulsbevarelse, dvs  $\vec{p}$  konstant i tid, impliserer umiddelbart at også energien  $E$  må være bevart, ettersom Lorentztransformasjonen "blander"  $E$  med komponent(er) av  $\vec{p}$   
 $\Rightarrow$  total fireimpuls  $P_\mu = (\vec{P}, iE/c)$  må være bevart!

$$P_\mu = P_{1\mu} + P_{2\mu} = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2, \frac{iE_1}{c} + \frac{iE_2}{c})$$

Bevarelse av  $P_4$  :  $\gamma mc^2 + \gamma mc^2 = Mc^2$

$$\Rightarrow M = 2\gamma m > 2m$$

Masseøkning:  $\Delta M = M - 2m = 2m(\gamma - 1)$

Tilsværer  $\Delta E = \Delta M c^2 = 2m(\gamma - 1)c^2$

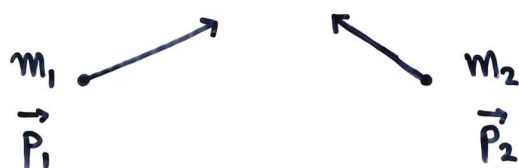
Kinetisk energi før kollisjonen ("sammensmeltingen") er omgjort til hvileenergi, og dermed masse.

## b. Relativistisk kinematikk

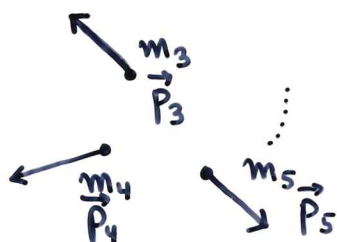
[Spesielt viktig innen høyenergifysikk og partikkelfysikk.]

Skal se på situasjon der 2 partikler kolliderer/vekselvirker og danner nye partikler (muligens flere enn 2).

FØR:



ETTER:



Kjenner altså ikke detaljene i kollisjonen, men vi kan likevel bruke klassisk mekanikk på systemet "tilstrekkelig lang tid" før og etter kollisjonsøyeblikket.

I CM-systemet er total impuls  $\vec{P} = 0$  (både før og etter kollisjonen). Bevaring av impuls og energi uttrykkes nå samlet som bevaring av firerimpuls.

$$\text{FØR: } P_\mu = P_{1\mu} + P_{2\mu} \quad ; \quad P_\mu = (\vec{P}, iE/c)$$

$$\text{ETTER: } P'_\mu = P_{3\mu} + P_{4\mu} + P_{5\mu} + \dots$$

Anta at vi er i CM-systemet, og innfør ekvivalent masse  $M \equiv E'/c^2$  i dette systemet.

$$\Rightarrow P'_\mu P'_\mu = \underbrace{\vec{P}'}_0^2 + (iE'/c)^2 = -\left(\frac{E'}{c}\right)^2 = -M^2 c^2$$

Da  $P_\mu P_\mu$  er invariant, må vi også ha  $P_\mu P_\mu = -M^2 c^2$  (for "støtet")

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_\mu P_\mu &= (P_{1\mu} + P_{2\mu})(P_{1\mu} + P_{2\mu}) = P_{1\mu} P_{1\mu} + P_{2\mu} P_{2\mu} + 2P_{1\mu} P_{2\mu} \\ &= -m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2 + 2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - E_1 E_2 / c^2) \\ &= -M^2 c^2 \end{aligned}$$

(har her brukt  $P_\mu P_\mu = -m^2 c^2$ ; se s. 133)

$$\Rightarrow M^2 c^4 = (E')^2 = (m_1^2 + m_2^2) c^4 + 2(E_1 E_2 - c^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$$

Anta at en partikkel i utgangspunktet er i ro i labsystemet,

f.eks.  $\vec{p}_2 = 0$ . Da er  $E_2 = m_2 c^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (E')^2 &= M^2 c^4 = (m_1^2 + m_2^2) c^4 + 2E_1 m_2 c^2 \\ &= (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2 - 2m_1 m_2 c^4 \\ &= (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_2 c^2 \underbrace{(E_1 - m_1 c^2)}_{K_1} \end{aligned}$$

$K_1$  = kinetisk energi for partikkel nr 1

$$\therefore (E')^2 = M^2 c^4 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_2 c^2 \cdot K_1$$



Vi ser at tilgjengelig energi  $E'$  i CM-systemet øker langsomt med innkommende kinetisk energi:

$$\text{For } K_1 \gg m_1 c^2, m_2 c^2 : E' \sim \sqrt{K_1}$$

Terskelenergi (kjent fra Atom- og Kjernefysikk?)

Terskelenergien er den minste energien som trengs for å få en reaksjon til å gå. Tilsvarende det tilfellet der alle reaksjonsproduktene er i ro i CM-systemet etter kollisjonen.

Her da at ekvivalent masse blir lik summen av massene til reaksjonsproduktene:  $M = \sum_r m_r$

$$\Rightarrow \left( \sum_r m_r \right)^2 c^4 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2m_2 c^2 K_1$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{m_1 c^2} = \frac{\left( \sum_r m_r \right)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_1 m_2}$$

(der vi altså antok at partikkel 2, "target", ligger i ro)

Reaksjonens  $Q$ -verdi defineres slik:

$$Q = \sum_r m_r - (m_1 + m_2) = \text{ny masse i CM-systemet}$$

Får da:

$$\left( \sum_r m_r \right)^2 - (m_1 + m_2)^2 = (Q + m_1 + m_2)^2 - (m_1 + m_2)^2 = Q^2 + 2Q(m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{m_1 c^2} = \frac{Q^2 + 2Q(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2}$$

Eks: Produksjon av antiproton



$N = \text{nukleon} = n \text{ eller } p$

$$m_p \approx m_n \approx m_{\bar{p}} \approx 938 \text{ MeV}/c^2 = m$$

$$\Rightarrow Q = 4m - 2m = 2m$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{mc^2} = \frac{(2m)^2 + 4m \cdot 2m}{2m^2} = \frac{4+8}{2} = 6$$

$$\Rightarrow K_1 = 6mc^2 = 5.57 \text{ GeV}$$

$$\frac{K_1}{c^2} = 6m = 3Q \quad (\text{med } N \text{ i ro})$$

Hvis vi istedet valgte  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$  ( $\Rightarrow$  CM-syst.  $\hat{=}$  Lab.syst.)

$$K_1 = K_2 = mc^2 = 938 \text{ MeV} \quad (\text{all kin. energi kan gå over i hvileenergi!})$$

$$\frac{K_1}{c^2} = m = \frac{1}{2}Q$$

Derfor: Hensiktsmessig med en ring der partikler kan akselereres i motsatt retning!

## KAP. 9: KANONISKE TRANSFORMASJONER

Knyttet til Hamiltonformuleringen av mekanikken. Så i kap. 8 at det som regel ikke er noen fordel med Hamiltonformalismen (framfor Lagrangeformalismen) når det gjelder å løse konkrete problemer i mekanikken.

Fordeler med Hamiltonformulering er mer fundamental art: bruker koordinater  $q$  og impulser  $p$  som uavhengige variable på samme nivå. Viktig i både statistisk mekanikk og kvantemekanikk.

Faserommet utspennes av  $2n$  akser;  $n$  akser for  $q_i$  og  $n$  akser for  $p_i$ .

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i = p_i(q, \dot{q}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [L = L(q, \dot{q}, t)]$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \partial H / \partial p_i \\ \dot{p}_i &= -\partial H / \partial q_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{Hamiltons ligninger}$$

Har sett at vi kan foreta "vanlige" koordinattransformasjoner

$$Q_i = Q_i(q, t)$$

f.eks. fra kartesiske koordinater  $q = \{x, y\}$  til plane polarkoord.

$Q = \{r, \theta\}$ . Kalles en punkttransformasjon.

Mer generelt, og i overensstemmelse med Hamiltonformuleringen, kan en transformere både  $q_i$  og  $p_i$  :

$$\textcircled{1} \begin{cases} Q_i = Q_i(q, p, t) \\ P_i = P_i(q, p, t) \end{cases} \quad \text{: transformasjon av faserommet}$$

slik at  $Q_i$  og  $P_i$  er kanoniske koordinater som oppfyller ligninger på "Hamiltonform"

$$\dot{Q}_i = \partial K / \partial P_i, \quad \dot{P}_i = -\partial K / \partial Q_i$$

Størrelsen  $K(Q, P, t)$  er da Hamiltonfunksjonen i de nye koordinatene, og  $\textcircled{1}$  er en kanonisk transformasjon.

Husker fra kap. 2 at Lagranges ligninger kunne utledes av

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (\text{Hamiltons prinsipp})$$

Tilsvarende kan Hamiltons ligninger finnes av

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(p, q, t)) dt = 0 \quad (\text{modifisert Hamiltons prinsipp})$$

[Vist i kap. 8-5, ikke pensum. Men husker at  $H = p_i \dot{q}_i - L$  fra kap. 8!]

Dermed må vi også ha

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t)) dt = 0$$

Sammenligning gir da:  $p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$

der  $F$  er en vilkårlig funksjon av vilkårlige variable, slik at

$\delta F(t_1) = \delta F(t_2) = 0$ , dvs. null variasjon i endepunktene.



Nyttig transformasjon dersom  $F$  inneholder halvparten av sine variable fra gammelt koordinatsett og halvparten fra nytt koordinatsett.  $F$  kalles da en genererende funksjon og fungerer som ei "bru" mellom  $(q, p)$  og  $(Q, P)$ .

Mulig valg:  $F = F_1(q, Q, t)$

$$\begin{aligned} \text{Dermed: } p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt} \\ &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \end{aligned}$$

Da  $q_i$  og  $Q_i$  er separat uavhengige, er denne ligningen kun identisk oppfylt dersom

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Alternativt valg:  $F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$

$$\begin{aligned} \text{Dermed: } p_i \dot{q}_i - H &= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_2}{dt} - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i \\ &= -K + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i - Q_i \dot{P}_i \end{aligned}$$

Med  $q_i$  og  $P_i$  uavhengige fås

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$F_1(q, Q, t)$  og  $F_2(q, P, t)$  relatert via Legendretransformasjon:

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \Rightarrow F_1(q, Q, t) = -P_i Q_i + \underbrace{F_2(q, P, t)}_{\text{"integrasjonskonst."}}$$

[ $P$  går ut,  $Q$  kommer inn; eller omvendt!]

Eks. 1 (Goldstein s. 386)

$$F_2 = q_i P_i$$

Det gir:  $P_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i$$

$$K = H$$

Funksjonen  $F_2$  genererer altså identitetstransformasjonen!

Noe mer generelt:

$$F_2 = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) P_i \quad ; \quad f_i \text{ vilkårlig funksjon}$$

Dermed:

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t)$$

De nye koord. avhenger bare av gamle koord. og tide, ikke av gamle impulser. Transf. er av typen

$$Q_i = Q_i(q, t)$$

dvs en punkttransf. Altså er en punkttransf. et spesialtilfelle av kanoniske transf.

## Eks. 2: Harmonisk oscillator (Goldstein s. 389-390)

Starter med  $H = p^2/2m + \frac{1}{2}kq^2$  i "vanlige" koordinater (én dimensjon!). Med  $\omega^2 = k/m$  kan vi skrive

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$$

Hvis vi kan finne en transformasjon

$$\begin{aligned} p &= f(P) \cos Q \\ \textcircled{1} \quad q &= (f(P)/m\omega) \sin Q \end{aligned}$$

blir  $K = H$  syklisk i den nye koordinaten  $Q$ :

$$K = H = \frac{f^2(P)}{2m} (\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \frac{f^2(P)}{2m}$$

Må bestemme  $f(P)$  slik at transformasjonen blir kanonisk.

Av  $\textcircled{1}$ :

$$p = m\omega q \cot Q, \quad \text{uavh. av } f(P)$$

Dette tilsvarende  $F$  er typen  $F_1(q, Q)$ :

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} \Rightarrow F_1 = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q \quad (\text{enklaste løsning})$$

Andre halvpart av transformasjonen:

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

Sammenligning med  $\textcircled{1}$  gir

$$f(P) = \sqrt{2m\omega P}$$

$$\Rightarrow H = \frac{f^2(P)}{2m} = \omega P \quad \text{i de transf. variable}$$

Da  $Q$  er syklisk koordinat, blir konjugert impuls  $P$  en konstant. Da  $H = E = (\text{konst.})$  total energi, fås

$$P = E/\omega$$

Beregningslign. for  $Q$ :

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$

$$\Rightarrow Q(t) = \omega t + \alpha \quad (\alpha \text{ fastlegges fra initialbet. } Q(0))$$

Løsningen for  $q$  blir:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

$\therefore$  vanlig løsning for harmonisk oscillator!